Mathématiques bac S...

OBJECTIF MENTION

Vincent Douce & Coline Chafer

Chapitre 1

Remerciements

- Le livre a entièrement été tapé avec le logiciel libre TeXmacs. Merci à son créateur Joris van der Hoeven ainsi qu'à toute l'équipe de la liste de diffusion www.texmacs.org.
- Les images ont toutes été réalisées avec MatPlotLib. Merci à toius les membres de la liste de diffusion Matplotlib-users.
- Merci aux relecteurs Frédérique Hutin, Arnaud Pascal, Gilles Deseuste, Florence Lomprez, Jean-Pierre Huerga, Jean-Jacques Dhénin.
- Merci au membres de la liste Mathlyc pour nos innombrables échanges.

Chapitre 2
Introduction

Ce livre est une réédition d'un ouvage paru en 2012 chez le même éditeur. L'idée est de proposer des qcm, ludiques par nature, permettant au lycée de réviser tout seul. Les corrections sont détaillées et illustrées. La structure de chaque chapitre est la même :

1 Révisions immédiates du cours :
pour s'entraîner sur des formules d'application directe du cours ;

2 Premières applications :
pour commencer à aller un peu plus loin ;

3 Questions de logique :
pour s'entraîner sur des relations logiques demandant précision et rigueur ;

4 Questions en tableau :
des questions mélangeant graphiques et formalisme ;

5 Questions Vrai/Faux :
de nombreuses questions où chaque sentence doit être analysée indépendamment ;

6 Questions ++ :
des questions plus approfondies, pour les candidats désireux de se confronter à la difficulté ;

7 QCM alternatifs (de 0 à 4 réponses justes) :
des qcm où chaque proposition est indépendante des autres ;

8 Familles, algo et récurrences :
des questions portant sur tableurs, récurrences et déchiffrage d'algorithmes ;

9 Réflexion autour d'un thème mathématique :
dans chaque chapitre, un ou deux thèmes ont été choisis par les auteurs pour être approfondis ;

10 Rédactions d'élèves imaginaires...
ici, le lycée doit se confronter à la rigueur du vocabulaire et des raisonnements ;

11 Exercices avec graphiques :
considérations autour d'une courbe ou d'une figure géométrique.

L'esprit du qcm, c'est avant tout l'astuce, et pour trouver l'astuce il faut apprendre à lire tous les détails d'un énoncé d'une part, et d'autre part à se l'approprier en regardant, typiquement, ce qui se passe dans des cas simples. Les questions, bien qu'indépendantes, fournissent cependant souvent des informations nécessaires les unes aux autres. Les réponses ne se contentent jamais, cependant, de donner l'astuce, mais permettent au contaire au lycéen de terminale S de comprendre les tenants et les aboutissants de chaque question.

Les exercices ont tous été choisis en fonction de leur pertinence en premier lieu pour l'examen, mais aussi pour la suite des études.

Table des matières

Chapitre 3

Énoncés - Logarithme

1 Révisions immédiates du cours

On pose, dans $]0;+\infty[$, $f(x)=-2\ln(x)+x^2+2$ et $g(x)=\dfrac{-x^2-2\ln(x)}{x}$.

Alors :

A) $f(\sqrt{\mathrm{e}})=$

a	b	c	d
e	$\mathrm{e}+1$	$\mathrm{e}-1$	aucune des trois

B) $g(x^2)=$

a	b	c	d
$-\dfrac{x^4+4\ln(x)}{x^2}$	$\dfrac{-x^4-2(\ln x)^2}{x^2}$	$-x^2+\dfrac{\ln(x^4)}{x^2}$	aucune des trois

C) La dérivée de f est :

a	b	c	d
$f'(x)=\dfrac{2x^2-2}{x}$	$f'(x)=\dfrac{2x^2+2}{x}$	$f'(x)=\dfrac{-2x^2-2}{x}$	aucune des trois

D) La dérivée de g est :

a	b	c	d
$g'(x)=-2x-\dfrac{2}{x}$	$g'(x)=\dfrac{f(x)}{x^2}$	$g'(x)=-\dfrac{f(x)}{x^2}$	aucune des trois

E) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=$

a	b	c	d
0	2	$-\infty$	$+\infty$

F) $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)=$

a	b	c	d
0	$+\infty$	n'existe pas	aucune des trois

G) Le nombre de solutions de l'équation $g(x)=0$ est :

a	b	c	d
0	1	2	3

H) Le minimum de f est égal à :

a	b	c	d
0	1	2	3

2 Premières applications

Soit $f(x)=\ln|x|$, définie sur $\mathbb{R}^*$, où $|x|$ désigne la valeur absolue de x.

A) Pour tout $x\neq 0$, $f'(x)=$

a	b	c	d
$\dfrac{1}{x}$	$\dfrac{1}{\lvert x\rvert}$	$-\dfrac{1}{x}$	aucune des trois

B) Sur $\mathbb{R}^*$, f est :

a	croissante
b	décroissante
c	croissante puis décroissante
d	décroissante puis croissante

C) Pour tout $x \neq 0$, on peut dire que $f(x) =$

a	b	c	d
$\lvert\ln x\rvert$	$\frac{1}{2}\ln(x^2)$	$\frac{1}{\ln x}$	aucune des trois

D) Pour tout $x \neq 0$, on peut dire que :

a	b	c	d
$f(\mathrm{e}^x) = \mathrm{e}^{f(x)}$	$\mathrm{e}^{f(x)} = x$	$f(\mathrm{e}^x) = \mathrm{e}^{f(x)} = x$	$f(\mathrm{e}^x) = x$

On pose $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$ dans $]0; +\infty[$.

E) La limite de f en 0 vaut :

a	b	c	d
0	$-\infty$	1	aucune des trois

F) On suppose admis que $\lim\limits_{x \to +\infty} f = 0$. Si l'on pose $X = \dfrac{1}{x}$, on peut alors, grâce à ce changement de variable, démontrer que :

a	b	c	d
$\lim\limits_{x \to 0}(x \ln x) = 0$	$\lim\limits_{x \to 0}\left(\dfrac{\ln x}{x}\right) = 0$	$\lim\limits_{x \to +\infty}\left(\dfrac{\ln x}{x}\right) = 0$	aucune des trois

G) Une primitive de f est :

a	b	c	d
$F(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$	$F(x) = (\ln x)^2$	$F(x) = \ln(\ln x)$	aucune des trois

H) Pour tout $x > 0$, on a $2f'(x) + f(x^2) =$

a	b	c	d
$\dfrac{2}{x^2}$	$\dfrac{2}{x}$	$2f'(x + x^2)$	aucune des trois

3 Questions de logique

A) Soit $q \in \mathbb{R}^*$. On suppose que $\ln(q^2)$ n'est pas positif. Alors :

a	q n'est pas positif
b	q n'est pas inférieur à 1
c	q^2 n'est pas compris entre 0 et 1
d	si q est négatif alors q est supérieur à -1

B) Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Il est correct de dire que :

a	pour que $\ln(a^2) = 0$ il suffit que $a = 1$
b	si $\ln(a^2) = 0$ alors a est positif
c	pour que $\ln(a^2) = 0$ il faut que $a = 1$
d	pour que $\ln(a^2) = 0$ il faut et il suffit que $a = 1$

On définit une fonction f par :

$$f(x) = \frac{1}{1 - \ln\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)}.$$

C) Soit I l'intervalle sur lequel la fonction f est définie **et** prend des valeurs strictement comprises entre $\dfrac{1}{2}$ et 1. Alors :

a	I est vide
b	l'ensemble $\{-2; -1\}$ est inclus dans I
c	l'intersection $I \cap \mathbb{R}^+$ est non-vide
d	aucune des trois

D) Soit f une fonction de $\mathbb{R}_+^*$ qui n'est pas la fonction nulle et qui vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x^2) = 2f(x).$$

Alors, on doit avoir :

a	b	c	d
$f(x) = \ln(x)$	$f(x) = 2\ln(x)$	$f(x) = \ln(x) + 2$	aucune des trois

E) Soit f une fonction de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $e^{f(x)} = x$. Alors, forcément :

a	b	c	d
$f(x) = \ln(x)$	$f(x) = 2\ln(x)$	$f(x) = \ln(x) + 2$	aucune des trois

F) Soit f une fonction de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) \times x = 1$. Alors, forcément :

a	b	c	d
$f(x) = \ln(x)$	$f(x) = 2\ln(x)$	$f(x) = \ln(x) + 2$	aucune des trois

4 Questions en tableau

On donne $f(x) = a\ln(x) + b$, définie dans $]0; +\infty[$. On suppose $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$.

si...		alors...
A) $f(e^2) = 4$ et $f(e^{-2}) = 2$	a	$a = \frac{1}{2}$ et $b = 3$
	b	$a = -\frac{1}{2}$ et $b = 3$
	c	$a = e^2$ et $b = e$
	d	$a = -e^2$ et $b = -e$
B) f décroissante	a	$a < 0$
	b	$a > 0$
	c	$a = 0$
	d	on ne peut pas conclure
C) f croissante	a	$b < 0$
	b	$b > 0$
	c	$b = 0$
	d	on ne peut pas conclure
D) $f(2) = 0$	a	$f'(2) \neq 0$
	b	$f'(2) = 0$
	c	$f(-2) = 0$
	d	on ne peut pas conclure

On donne $f(x) = \ln(ax + b)$ définie dans un certain intervalle, avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$.

si...		alors...
E) $f(e-2) = 1 + \ln(2)$ et $f(2) = 3\ln(2)$	a	$a = 1$ et $b = 6$
	b	$a = 2$ et $b = 4$
	c	$a = 0$ et $b = 8$
	d	$a = 4$ et $b = 0$
F) $a < 0$	a	f croissante
	b	f décroissante
	c	ni l'un ni l'autre
	d	on ne peut pas conclure
G) f décroissante	a	$a < 0$
	b	$a > 0$
	c	$b < 0$
	d	on ne peut pas conclure
H) $b \neq 0$	a	il est possible de trouver une valeur de b telle que $f(0) = 0$
	b	il est impossible de trouver une telle valeur de b
	c	$f(0) = 0$ quelle que soit la valeur de b
	d	forcément $f\left(a - \frac{b}{a}\right) > 0$

5 Questions Vrai/Faux

On pose $f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x}$ dans $]-1;+\infty[$.

Alors :

A) En cherchant la limite de f en 0, on tombe sur une forme indéterminée « $\dfrac{0}{0}$ ». **V** ☐ **F** ☐

B) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$. **V** ☐ **F** ☐

C) Pour tout $-1<x<1$, $f(x)+f(-x)=\dfrac{\ln(1-x^2)}{x}$. **V** ☐ **F** ☐

D) Pour tout $x>0$, $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=x\ln(x+1)-x\ln(x)$. **V** ☐ **F** ☐

On pose $f(x)=\ln\left(\dfrac{3x+2}{5x}\right)$. On appelle D_f l'ensemble de définition de f.

Alors :

E) Pour tout $x\in D_f$, les quantités $\ln(3x+2)$ et $\ln x$ sont définies et l'on a :
$f(x)=\ln(3x+2)-\ln 5-\ln x$. **V** ☐ **F** ☐

F) La dérivée de f a pour expression : $f'(x)=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{5x}{3x+2}$. **V** ☐ **F** ☐

G) $D_f=]0;+\infty[$. **V** ☐ **F** ☐

H) Il n'existe qu'un seul $x\in\mathbb{R}$ tel que $f(x)=0$. **V** ☐ **F** ☐

On suppose que f est une fonction croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ avec $f(0)=0$.

Alors :

I) La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=\ln(f(x))$ est croissante sur $\mathbb{R}$. **V** ☐ **F** ☐

J) La fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x)=\ln(1+(f(x))^2)$
a un minimum absolu en $x=0$. **V** ☐ **F** ☐

K) La fonction k définie sur $\mathbb{R}$ par : $k(x)=\ln(f(\ln x))$ est définie dans $]0;+\infty[$. **V** ☐ **F** ☐

L) f peut avoir pour expression $f(x)=\ln(1+\mathrm{e}^x)$. **V** ☐ **F** ☐

On pose $g(x)=\dfrac{-x^2-2\ln(x)}{x}$ dans $]0;+\infty[$, et l'on appelle C_g le graphe de g.

M) Si $u(x)=-x$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty}(g(x)-u(x))=0$. **V** ☐ **F** ☐

N) C_g est strictement en dessous de la droite $y+x=0$
si et seulement si x est dans $]e;+\infty[$. **V** ☐ **F** ☐

O) La courbe de la fonction $h(x)=\dfrac{g(x)}{x}$ admet une asymptote horizontale. **V** ☐ **F** ☐

P) On pose $k(x)=g(\mathrm{e}^x)$. Alors $k'(x)=g'(\mathrm{e}^x)$. **V** ☐ **F** ☐

6 Questions ++

Soit f une fonction dérivable, définie dans $]0;+\infty[$ et vérifiant, pour tout réel $x>0$, la relation :

$$f(x\times\mathrm{e})=1+f(x).$$

A) Alors :

a	on peut affirmer que $f(x)=\ln x$
b	$f(x)=\ln x+k$ convient pour tout $k\in\mathbb{R}$
c	$f(x)=\mathrm{e}^x$ convient
d	forcément $f(1)=0$

B) De même, on peut affirmer que :

a	pour tout $x>0$ tel que $f'(x)\neq 0$, on a : $\dfrac{f'(\mathrm{e}\times x)}{f'(x)}=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$
b	pour tout $x>0$, $f'(x\times \mathrm{e})=f'(x)$
c	pour tout $x>0$, on a $\dfrac{1}{x\times \mathrm{e}}=\dfrac{1}{x}$
d	forcément $f'(\mathrm{e})=0$

C) On a pour tout $n\in\mathbb{N}$:

a	$f(x\times n\mathrm{e})=1+nf(x)$
b	$f(x^n\times \mathrm{e})=n+f(x)$
c	$f(x^n\times \mathrm{e})=1+nf(x)$
d	$f(x\times \mathrm{e}^n)=n+f(x)$

D) Soit g une fonction telle qu'il existe un intervalle I sur lequel $g'(x)$ est à valeurs strictement positives ainsi que toutes les dérivées suivantes de g. Alors :

a	on doit avoir $g(x)=\mathrm{e}^x$
b	$g(x)=k\mathrm{e}^{mx}+p$ convient, avec $k,m>0$ et $p\in\mathbb{R}$ et $I=\mathbb{R}$
c	$g(x)=\dfrac{1}{x}$ convient avec un intervalle bien choisi
d	aucune des trois

E) Soit une fonction g vérifiant la propriété précédente, à savoir : « il existe un intervalle sur lequel $g'(x)$ est à valeurs strictement positives ainsi que toutes les dérivées suivantes de g ». Alors :

a	g est forcément définie en 0
b	g est à valeurs positives sur I
c	pour tout $x\in I$, $g(x)\leqslant \mathrm{e}^x$
d	aucune des trois

7 QCM alternatifs (de 0 à 4 réponses justes)

A) On pose $f(x)=\ln(1-\mathrm{e}^{-x})$. Alors on peut écrire :

α	β	γ	δ
$f(x)+x=\ln(\mathrm{e}^x+1)$	$f(x)=\ln(1)-\ln(\mathrm{e}^{-x})$	$f(x)=\ln\left(\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x}\right)$	$f(x)=\ln(\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x)-2x$

B) Soit f une fonction telle que $\lim\limits_{x\to 0} f=+\infty$. Alors on peut avoir :

α	β	γ	δ
$f(x)=\dfrac{1}{x}+\ln(x)$	$f(x)=\dfrac{1}{x}-\ln(x)$	$f(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}$	$f(x)=\dfrac{1}{\ln(x)}+\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$

C) Soit f une fonction définie dans $]0;+\infty[$ vérifiant $\lim\limits_{x\to 0} f=+\infty$, soit u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x)=x$ et l'on suppose que $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-u(x))=0$. Alors on peut avoir :

α	β	γ	δ
$f(x)=\dfrac{1}{x}+\ln(x)$	$f(x)=x+\dfrac{1}{\ln(1+x)}$	$f(x)=\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)+x$	$f(x)=\dfrac{1}{x^2}+\ln(1+e^x)$

D) Soit f une fonction dérivable dans $]0;+\infty[$, décroissante dans $]0;1[$ et croissante dans $]1;+\infty[$, et soit F une primitive de f. Alors on peut avoir :

α	β	γ	δ
$F(x)=x\ln x$	$F(x)=(x-1)\ln(x)$	$F(x)=\dfrac{x^2}{4}(2\ln x-3)$	F décroissante

E) Même hypothèses que la question précédente. Soit f' la dérivée de f. Alors on peut avoir :

α	β	γ	δ
$f'(x)=x\ln x$	$f'(x)=\dfrac{1}{x}+\ln x$	$f'(x)=\ln x$	f' strictement décroissante dans $]0;+\infty[$

8 Familles, algo et récurrences

On revient ici au principe « une seule réponse juste ».

A) On pose $f_n(x)=\dfrac{\ln(nx)}{nx}$ pour $x>0$ et $n\in\mathbb{N}$. Alors :

a	la fonction f_3 admet un maximum égal au maximum de la fonction f_{33}
b	la fonction f_3 et la fonction f_{33} admettent toutes les deux un maximum en une même abscisse x_0
c	pour tout $x>0$, on a $f_3(x)=f_{33}(x)$
d	pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f_n'(x)=\dfrac{1}{(nx)^2}$

B) On pose $f_n(x)=\ln(n+x)$ pour tout $x>0$. Alors :

a	le nombre $f_n'(0)$ ne dépend pas de n
b	le nombre $f_n'(1-n)$ ne dépend pas de n
c	le nombre $f_n'(1+n)$ ne dépend pas de n
d	le nombre $f_n'(\mathrm{e}^n-n)$ ne dépend pas de n

C) On pose $f_n'(x)=x^n\ln(x)$ pour tout $x>0$. Alors :

a	la fonction $F_n(x)=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\ln(x)-\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$ est une primitive de f_n
b	pour tout $x>0$, $f_n'(x)=x^{n-1}$
c	la suite $\left(f_n'\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}}\right)\right)$ converge vers $+\infty$
d	le nombre $f_n\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}}\right)$ ne dépend pas de n

D) On pose $f(x)=\dfrac{1}{x(x+1)}+\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$. Alors :

a	on peut écrire f sous la forme $f(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}+\ln(x+1)+\ln(x)$
b	on peut écrire f sous la forme $f(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+1}+\ln(x+1)-\ln(x)$
c	$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k)=\frac{n}{n+1}+\ln(n+1)$
d	$\displaystyle\sum_{k=1}^{2} f(k)=\frac{2}{3}+\ln\left(1+1+\frac{1}{2}\right)$

On considère l'algorithme suivant :

Algorithme 3.1

I. $x\leftarrow 1$ `et` $y\leftarrow 0$

II. `tant que` $x<10$:

III. `dessiner le point de coordonnées` (x,y)

IV. $y\leftarrow y+\dfrac{0,1}{x}$

V. $x\leftarrow x+0,1$

E) Cet algorithme permet d'approcher sur $[1;10]$ la courbe de la fonction :

a	b	c	d
$f(x)=\ln x$	$f(x)=\ln(1+\mathrm{e}^x)$	$f(x)=\sqrt{x}$	$f(x)=\dfrac{1}{x}$

F) Si l'on modifiait les étapes I et IV par :

I'. $x \leftarrow 1$ et $y \leftarrow 1$
...
IV'. $y \leftarrow y + \dfrac{0,1}{2y}$
...

Alors l'algorithme pourrait cette fois servir à approcher la fonction :

a	b	c	d
$f(x) = \ln x$	$f(x) = \ln(1 + e^x)$	$f(x) = \sqrt{x}$	$f(x) = \dfrac{1}{x}$

9 Réflexion autour d'un thème mathématique

Thème : l'**ensemble de définition**.

A) Soit f une fonction définie par $f(x) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$ et soit D_f son ensemble de définition.

Soit d'autre part g dérivable dans $]0; +\infty[$ et vérifiant $g'(x) = \dfrac{-1}{x(x+1)}$.

a	la dérivée de f peut s'écrire $f'(x) = \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x}$
b	dans $]0; +\infty[$, g et f diffèrent par une constante
c	$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$
d	$\lim\limits_{x \to +\infty} (x \times f(x)) = +\infty$

B) Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)$ dans $\mathbb{R}^*$.

a	b	c	d
$\lim\limits_{x \to 0} (x^2 \times f(x) = +\infty)$	$\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x^2} \times f(x)\right) = +\infty$	$\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{x^2}{f(x)}\right) = +\infty$	$\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x^2 f(x)}\right) = +\infty$

C) La fonction $f(x) = \ln(\ln(\ln x))$ a pour ensemble de définition :

a	b	c	d
$D_f =]0; +\infty[$	$D_f =]1; +\infty[$	$D_f =]e; +\infty[$	$D_f =]e^e; +\infty[$

D) Une des fonctions suivantes a pour ensemble de définition $D_f =]-\infty; -9[\cup]9; +\infty[$. C'est :

a	$f_1(x) = \ln(x - 9)$
b	$f_2(x) = \ln(x - 9) + \ln(1 - x^2)$
c	$f_3(x) = \ln[(x - 9) \times (1 - x^2)]$
d	$f_4(x) = \ln((x + 9)(x - 1)) + \ln((x - 9)(x + 1))$

E) Soit f une fonction et D_f son ensemble de définition, c'est-à-dire l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que $f(x)$ est définie :

a	si $a \notin D_f$, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ est égal à $+\infty$ ou $-\infty$.
b	si $a \notin D_f$, alors la courbe C_f admet en a une asymptote verticale (donc d'équation $x = a$).
c	soit $g(x) = \ln(x)$ alors les $g \circ f$ et $f \circ g$ ont forcément le même ensemble de définition
d	il y a des fonctions dont l'ensemble de définition est vide

F) Soit $f(x) = \dfrac{x - 1}{\ln(x - 1)}$. Alors :

a	b	c	d
$D_f =]1; 2[\cup]2; +\infty[$	$D_f = \mathbb{R}^{+*}$	$D_f =]1; +\infty[$	$D_f = [1; +\infty[$

10 Rédactions d'élèves imaginaires...

A) Alphonse écrit : « *Soit* $f(x)=x\ln x$ *dans* $]0;+\infty[$

- α) *f est croissante comme produit de deux fonctions croissantes* **V** ☐ **F** ☐
- β) *Toute limite qui s'écrit « zéro fois quelque chose », vaut 0.* **V** ☐ **F** ☐
- γ) *f s'annule une seule fois dans* $]0;+\infty[$. **V** ☐ **F** ☐
- δ) *La dérivée de f a pour expression* $f'(x)=1\times\dfrac{1}{x}$. » **V** ☐ **F** ☐

B) Baptiste écrit « *Soit f définie par* $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ *dans* $]0;+\infty[$.

- α) *Pour tout* $x>0$, $f(2x)=\dfrac{\ln(\cancel{2}x)}{\cancel{2}x}=\dfrac{\ln x}{x}=f(x)$. **V** ☐ **F** ☐
- β) *On peut écrire* $f(x)=\ln x\times\dfrac{1}{x}$. **V** ☐ **F** ☐
- γ) *les deux fonctions* $x\mapsto\ln x$ *et* $x\mapsto x$ *sont monotones donc f aussi.* **V** ☐ **F** ☐
- δ) $\lim\limits_{x\to0}f(x)=-\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ *par conséquent f est une fonction croissante.* » **V** ☐ **F** ☐

11 Exercices avec graphiques

Sur le graphique suivant, on a représenté les courbes des trois fonctions f,g,h définies par :

$$f(x)=\ln(x),\ g(x)=e^x,\ h(x)=x.$$

Les points : A d'abscisse a, et B d'abscisse b ont pour milieu I.
Les pointillés sont parallèles aux axes, et les points sont sur les courbes C_f, C_g, C_h.
Enfin, U et V, d'abscisses respectives u et v, et de milieu M, sont tels que $(VU)\perp(C_h)$.

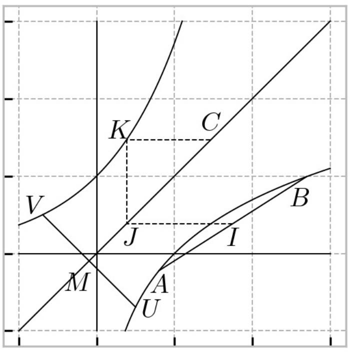


Figure 3.1. Trois courbes et neuf points.

A) Alors :

a	I a pour coordonnées $\left(\dfrac{a+b}{2},\ln\sqrt{ab}\right)$
b	C a pour abscisse $e^{\sqrt{ab}}$
c	quelles que soient les positions de A et B, $(AJ)\perp(JC)$
d	KJC n'est pas un triangle isocèle

B) V a pour coordonnées :

a	**b**	**c**	**d**
$(\ln(u);\ln(u))$	$(\ln(u);u)$	$(u;e^u)$	$(e^u;u)$

C) (UV) a pour équation :

a	**b**	**c**	**d**
$y=ux+\ln(u)$	$y=\ln(u)+u-x$	$y=x-u-\ln(u)$	$y-x=\ln(u)$

D) La distance UV vaut :

a	**b**	**c**	**d**
$\sqrt{u^2+(\ln u)^2}$	$2\ln u$	$\sqrt{2}\times\lvert\ln u-u\rvert$	$\sqrt{(\ln u-u)^2}$

Chapitre 4
Corrigés - Logarithme

1 Révisions immédiates du cours

A) **Réponse** b : $f(\sqrt{\mathrm{e}}) = \boxed{\mathrm{e}+1}$

Il faut remarquer que $\sqrt{\mathrm{e}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$ donc $\ln\sqrt{\mathrm{e}} = \ln \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}$; et se rappeler la formule $\sqrt{x}^2 = x$.
Ainsi, $f(\sqrt{\mathrm{e}}) = -2\ln(\sqrt{\mathrm{e}}) + 2 + (\sqrt{\mathrm{e}})^2 = -2 \times \dfrac{1}{2} \times \ln \mathrm{e} + 2 + \mathrm{e} = -1 + 2 + \mathrm{e} = \mathrm{e} + 1$.

B) **Réponse** a : $g(x^2) = \boxed{-\dfrac{x^4 + 4\ln(x)}{x^2}}$

$g(x^2) = \dfrac{-(x^2)^2 - 2\ln(x^2)}{x^2} = \dfrac{-x^4 - 2 \times 2\ln x}{x^2} = -\dfrac{x^4}{x^2} - \dfrac{4\ln x}{x^2} = -x^2 - \dfrac{4\ln x}{x^2}$.

C) **Réponse** a : $f'(x) = \boxed{\dfrac{2x^2 - 2}{x}}$

$f'(x) = -\dfrac{2}{x} + 2x = \dfrac{2x^2 - 2}{x}$.

D) **Réponse** c : $g'(x) = \boxed{-\dfrac{f(x)}{x^2}}$

$g(x) \; = \; \dfrac{-x^2 - 2\ln(x)}{x}$ est de la forme $\dfrac{u(x)}{v(x)}$ et donc :

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} \\
&= \frac{\left(-2x - \dfrac{2}{x}\right) \times x - (-x^2 - 2\ln x)}{x^2} \\
&= \frac{-2x^2 - 2 + x^2 + 2\ln x}{x^2} \\
&= \frac{2\ln x - 2 - x^2}{x^2} \\
&= -\frac{f(x)}{x^2}.
\end{aligned}$$

E) **Réponse** d : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \boxed{+\infty}$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} (-2\ln x) = +\infty$.

F) **Réponse** d : $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = \boxed{\text{aucune des trois}}$

$g(x) = \dfrac{-x^2\left(1 + \dfrac{2\ln x}{x^2}\right)}{x} = -x\left(1 + \dfrac{2\ln x}{x^2}\right)$.

$\dfrac{2\ln x}{x^2}$ tend vers 0 lorsque que $x \mapsto +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.

On pourrait aussi écrire $g(x) = -x - \dfrac{2\ln x}{x}$ et l'on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2\ln x}{x} = 0$.

G) **Réponse** b : $\boxed{1}$ solution

$g(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 - 2\ln x = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2\ln x = 0$. Posons $w(x) = x^2 + 2\ln x$: alors $w'(x) = 2x + \dfrac{2}{x} = \dfrac{2x^2 + 2}{x} > 0$ donc w est croissante dans $]0;+\infty[$, de limite $+\infty$ lorsque $x \mapsto +\infty$ et $-\infty$ lorsque $x \mapsto 0$ d'où, par les valeurs intermédiaires, la réponse b.

H) **Réponse** d : Le minimum de f est égal à : $\boxed{3}$

$f'(x)=\dfrac{2}{x}(x^2-1)$ est strictement positive dans $]1;+\infty[$ et strictement négative dans $]0;1[$.

$f'(x)=\dfrac{2x^2-2}{x}=\dfrac{2(x^2-1)}{x}$ donc le tableau de variations de f est le suivant :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$\|\|$	$\searrow$	3	$\nearrow$	

ainsi le minimum de f est $f(1)=-2\ln(1)+2+1^2=3$.

2 Premières applications

A) **Réponse a** : $\boxed{\dfrac{1}{x}}$

Pour tout $x\neq 0$, $f'(x)=\dfrac{1}{x}$ vrai évidemment dans $\mathbb{R}_+^*$, et, dans $\mathbb{R}_-^*$ on a : $f(x)=\ln(-x)$ donc $f'(x)=\dfrac{-1}{-x}=\dfrac{1}{x}$.

B) **Réponse d** : $\boxed{\text{décroissante puis croissante}}$

f est croissante dans $\mathbb{R}_+^*$ puisque dans cet intervalle elle se confond avec la fonction ln.
Dans $\mathbb{R}_-^*$, on a $f(x)=\ln(-x)$ qui est décroissante au même titre que $x\mapsto -x$.

C) **Réponse b** : $\boxed{\dfrac{1}{2}\ln(x^2)}$

b est juste car pour tout $x\neq 0$, on a $\dfrac{1}{2}\ln x^2=\ln\sqrt{x^2}=\ln|x|$.

a est fausse car $\ln\left|\dfrac{1}{2}\right|\neq\left|\ln\dfrac{1}{2}\right|$ puisque $\ln\left|\dfrac{1}{2}\right|<0$ tandis que $\left|\ln\dfrac{1}{2}\right|>0$.

c est fausse : elle n'est même pas définie pour $x=1$ alors que f l'est.

D) **Réponse d** : $\boxed{f(\mathrm{e}^x)=x}$

En effet, on remarque que $f(\mathrm{e}^x)=\ln|\mathrm{e}^x|=x$ tandis que $\mathrm{e}^{f|x|}=\mathrm{e}^{\ln|x|}=|x|$.

E) **Réponse b** : $\boxed{-\infty}$

On tombe sur le cas $\dfrac{-\infty}{0}$, car $\lim\limits_{x\to 0}\ln x=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0}x=0$ (en fait 0^+ car on est dans $]0;+\infty[$), et l'on peut affirmer que, par quotient : $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=-\infty$.

F) **Réponse a** : $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}(x\ln x)=0}$

Partons de $\lim\limits_{x\to+\infty}f=0$. Si l'on pose $X=\dfrac{1}{x}$ on a donc $x\to+\infty\Leftrightarrow\begin{cases}X\to 0\\ X>0\end{cases}$,

d'où $\lim\limits_{\substack{X\to 0\\ X>0}}\dfrac{\ln\frac{1}{X}}{\frac{1}{X}}=0\Leftrightarrow\lim\limits_{\substack{X\to 0\\ X>0}}(-X\ln X)=0$ d'où le résultat demandé.

G) **Réponse d** : $\boxed{\text{aucune des trois}}$

Une primitive de f serait en fait $F(x)=\dfrac{1}{2}(\ln x)^2$.

a est fausse car la fonction proposée est la dérivée de f.

b est fausse (mais pas de loin !) car si $F(x)=(\ln x)^2$ alors $F'(x)=2\dfrac{\ln x}{x}$.

c est fausse car si $F(x)=\ln(\ln x)$ alors $F'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}}{\ln x}=\dfrac{1}{x\ln x}\neq f(x)$.

H) **Réponse a** : $\boxed{\dfrac{2}{x^2}}$

Déjà $f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\times x-\ln x}{x^2}=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$ et maintenant :

$$2f'(x)+f(x^2)=2\times\frac{1-\ln x}{x^2}+\frac{\ln(x^2)}{x^2}=\frac{2\cancel{-2\ln x}+\cancel{2\ln x}}{x^2}=\frac{2}{x^2}.$$

La c est totalement fantaisiste.

3 Questions de logique

A) **Réponse d** : $\boxed{\text{si } q \text{ est négatif alors } q \text{ est supérieur à } -1}$
Soit $q \in \mathbb{R}^*$ alors : « $\ln(q^2)$ n'est pas positif » $\Leftrightarrow$ « $\ln(q^2)$ négatif » $\Leftrightarrow$ « q^2 est entre 0 et 1 ».
Cette dernière phrase est équivalente à « q est soit entre -1 et 0, soit entre 0 et 1 ».
Ainsi, a est fausse car on n'a aucune information sur le signe de q ;
b est fausse car si, q est justement inférieur à 1 ;
c est fausse car si, justement, q^2 est entre 0 et 1 ;
d est juste car si q est négatif c'est que q est entre -1 et 0 donc q est supérieur à -1.

B) **Réponse a** : $\boxed{\text{pour que } \ln(a^2)=0 \text{ il suffit que } a=1}$
Cet exercice jour sur la subtilité entre « il *faut* » (condition nécessaire) et « il *suffit* » (condition suffisante) :
- « pour que $\ln(a^2)=0$ il *suffit* que $a=1$ » signifie que $a=1 \Rightarrow \ln(a^2)=0$ ce qui est juste ;
- « pour que $\ln(a^2)=0$ il *faut* que $a=1$ » signifierait que $\ln(a^2)=0 \Rightarrow a=1$ ce qui est faux car $\ln(a^2)=0 \Rightarrow a \in \{-1;1\}$.

Quant à b : si $\ln(a^2)=0$, cela peut vouloir dire $a=-1$ donc non, cela n'implique pas forcément a positif.

C) **Réponse c** : $\boxed{\text{l'intersection } I \cap \mathbb{R}^+ \text{ est non-vide}}$
a est fausse, $\{-2;-1\}$ n'est pas inclus dans I.
b est fausse car -1 n'est pas dans l'intervalle I.
c est juste, on a $\dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{1-\ln\left(1-\dfrac{1}{x}\right)} < 1 \Leftrightarrow 1 < 1-\ln\left(1-\dfrac{1}{x}\right) < 2 \Leftrightarrow -1 < \ln\left(1-\dfrac{1}{x}\right) < 0$, ce qui équivaut à écrire que $\mathrm{e}^{-1} < 1-\dfrac{1}{x} < 1 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-1}-1 < -\dfrac{1}{x} < 0 \Leftrightarrow 0 < \dfrac{1}{x} < \mathrm{e}^{-1}-1$, qui est finalement équivalent à : $x > \dfrac{1}{\mathrm{e}^{-1}-1} = \dfrac{\mathrm{e}}{1-\mathrm{e}} \approx -1,58$. Or, $[-1,58\,;\,+\infty[\cap \mathbb{R}^+$ n'est pas vide.

D) **Réponse d** : $\boxed{\text{aucune des trois}}$
f peut très bien avoir pour expression $f(x)=k\ln x$, $k \in \mathbb{R}$.

E) **Réponse a** : $f(x)=\boxed{\ln x}$
On prend le ln de chaque côté et l'on obtient $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln \mathrm{e}^{f(x)} = \ln x \Leftrightarrow f(x)=\ln x$.

F) **Réponse d** : $\boxed{\text{aucune des trois}}$
Soit f une fonction de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x)\times x = 1$. Alors on a $f'(x)=\dfrac{1}{x}$ donc $f(x)=\ln x + k$, $k \in \mathbb{R}$.

4 Questions en tableau

A) **Réponse a** : $\boxed{a=\dfrac{1}{2} \text{ et } b=3}$
On a : $\begin{cases} 2a+b=4 \\ -2a+b=2. \end{cases}$
On ajoute les deux lignes : $2b=6 \Leftrightarrow b=3$. On soustrait les deux lignes : $4a=2 \Leftrightarrow a=\dfrac{1}{2}$.

B) **Réponse a** : $\boxed{a<0}$
$f'(x)=\dfrac{a}{x}$ et ceci doit être négatif dans $]0;+\infty[$.

C) **Réponse d** : $\boxed{\text{on ne peut pas conclure}}$
Car b n'influe pas sur les variations de f.

D) **Réponse a** : $\boxed{f'(2) \neq 0}$
Le piège est que la réponse a ne dépend pas de l'hypothèse. En effet, on a dans tous les cas $f'(2)=\dfrac{a}{2}$ et ceci est non nul vu que a est supposé non nul.
Quand à la proposition c, elle n'a pas de sens vu que f n'est pas définie dans $\mathbb{R}_-$.

E) **Réponse b** : $\boxed{a=2 \text{ et } b=4}$
On applique la fonction exponentielle de chaque côté :
$a(\mathrm{e}-2)+b=\mathrm{e}^{1+\ln(2)}=2\mathrm{e}$.
On a aussi $f(2)=\ln(2a+b)=3\ln 2$ d'où, par le même procédé : $2a+b=2^3$.
On doit donc maintenant résoudre $\begin{cases} a(\mathrm{e}-2)+b=2\mathrm{e} \\ 2a+b=8 \end{cases}$.
On soustrait les deux lignes et l'on obtient $a(\mathrm{e}-4)=2\mathrm{e}-8=2(\mathrm{e}-4)$ d'où $a=2$.
Si l'on veut, pour s'entraîner, terminer le calcul, on remplace a par 2 dans l'une des équations (ou dans les deux, pour vérifier) :

$$\begin{cases} 2(\mathrm{e}-2)+b=2\mathrm{e} \\ 4+b=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=4 \\ b=4 \end{cases}.$$

F) **Réponse b** : $\boxed{f \text{ est décroissante}}$
L'ensemble de définition de f est $\begin{cases} \left]-\dfrac{b}{a};+\infty\right[\text{ si } a>0 \\ \left]-\infty;-\dfrac{b}{a}\right[\text{ si } a<0 \end{cases}$ et dans cet intervalle :

$$f'(x)=\frac{a}{ax+b}=\frac{1}{x-\left(-\dfrac{b}{a}\right)}.$$

Vu qu'on suppose $a<0$, on peut affirmer que dans D_f, on a $f'(x)<0$ d'où f décroissante.

G) **Réponse a** : $\boxed{a<0}$
On peut éliminer d'emblée la réponse c, car b n'intervient pas dans les variations de f.
La fonction ln est croissante donc f décroissante $\Leftrightarrow$ $x\mapsto ax+b$ décroissante $\Leftrightarrow$ $a<0$.

H) **Réponse a** : $\boxed{\text{il est possible de trouver une valeur de } b \text{ telle que } f(0)=0}$
Il suffit de prendre $b=1$.
La réponse c est fausse car pour $b\neq 1$, $f(0)=\ln(b)\neq 0$.
Pour la réponse d, $f\left(a-\dfrac{b}{a}\right)=\ln(a^2-b+b)=\ln(a^2)$ n'a aucune raison d'être positive.

5 Questions Vrai/Faux

A) | **V** | |

$\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)=0$ et $\lim\limits_{x\to 0}x=0$ d'où la forme indéterminée $\dfrac{0}{0}$.

B) | | **F** |

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$ car cela correspond à $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\dfrac{\ln(1+x)-\ln(1+0)}{x}=1$, formule du taux d'accroissement qui définit la dérivée de la fonction $x\mapsto\ln(1+x)$ en 0.

C) | | **F** |

$f(x)+f(-x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x}+\dfrac{\ln(1-x)}{-x}=\dfrac{\ln(1+x)-\ln(1-x)}{x}$ donc c'est faux.

Remarque : il aurait fallu écrire $f(x)-f(-x)$ pour que ce soit vrai.

D) | **V** | |

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{\dfrac{1}{x}}=\frac{\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)}{\dfrac{1}{x}}=x\ln(x+1)-x\ln x.$$

E) | | **F** |

Les quantités $3x+2$ et $5x$ peuvent être toutes les deux négatives.
Exemple : $x=-1$.

F) **F**

La dérivée de f admet forcément $\frac{-2}{3}$ et 0 pour valeurs interdites. D'autre part, dans $\mathbb{R}^+$ on a $f(x) = \ln(3x+2) - \ln(5x)$ donc $f'(x) = \frac{3}{3x+2} - \frac{\cancel{5}}{\cancel{5}x}$, qui n'a rien à voir avec l'expression proposée.

G) **V**

Pour trouver D_f il faut résoudre $\begin{cases} 3x+2>0 \\ \text{et} \\ 5x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{2}{3} \\ \text{et} \\ x>0 \end{cases}$ d'où $D_f =]0;+\infty[$.

H) **V**

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3x+2}{5x} = 1 \Leftrightarrow 5x = 3x+2 \Leftrightarrow 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1.$

I) **F**

La fonction $g(x) = \ln(f(x))$ n'est pas définie dans $\mathbb{R}_-$.

J) **V**

La fonction $h(x) = \ln(1+(f(x))^2)$ est définie partout.
Elle a les mêmes variations que $x \mapsto (f(x))^2$. Cette dernière est décroissante là où $f(x) \leqslant 0$, donc dans $]-\infty;0]$, puis croissante là où $f(x) \geqslant 0$, donc dans $[0;+\infty[$.

K) **F**

$k(x) = \ln(f(x))$ est définie pour $\begin{cases} x>0 \\ \text{et} \\ f(\ln x) > 0 \end{cases}$.
Mais pour $x>0$, la quantité $\ln x$ varie de $-\infty$ à $+\infty$ donc $f(\ln x)$ aussi.

Remarque : k serait définie dans $]1;+\infty[$.

L) **F**

f ne peut avoir pour expression $f(x) = \ln(1+\mathrm{e}^x)$, car $\ln(1+\mathrm{e}^0) = \ln 2 \neq 0$.

M) **V**

On simplifie $g(x) - (-x) = \frac{-x^2 - 2\ln x}{x} + x = \cancel{-x} - \frac{2\ln(x)}{x} \cancel{+x}$ de limite 0 lorsque $x \to +\infty$ (on dit que C_g admet en $+\infty$ une *asymptote oblique* d'équation $y = -x$).

N) **F**

La droite demandée a pour équation $y = -x$.
On simplifie donc $g(x) - (-x) = \frac{-x^2 - 2\ln(x)}{x} + x = \frac{-2\ln(x)}{x}$. Ceci est positif dans $]0;1[$ et négatif dans $]1;+\infty[$.

O) **V**

$h(x) = \frac{-x^2 - 2\ln(x)}{x^2} = -1 - 2 \times \frac{\ln(x)}{x^2}$ de limite -1 lorsque $x \to +\infty$.
Donc, C_h admet une asymptote horizontale d'équation $y = -1$ en $+\infty$.

P) **F**

Pour répondre sans l'utiliser, on pouvait simplifier l'expression de $k(x)$:
D'un côté, $g(x) = \frac{-x^2 - 2\ln(x)}{x} = -x - \frac{2\ln(x)}{x}$;
on en déduit : $k(x) = g(\mathrm{e}^x) = -\mathrm{e}^x - \frac{2\ln(\mathrm{e}^x)}{\mathrm{e}^x} = -\mathrm{e}^x - \frac{2x}{\mathrm{e}^x} = -\mathrm{e}^x - 2x\,\mathrm{e}^{-x}$.
En en dérivant, on a $k'(x) = -\mathrm{e}^x - (2 \times \mathrm{e}^{-x} + 2x\,(-\mathrm{e}^{-x})) = -\mathrm{e}^x - 2\,\mathrm{e}^{-x} + 2x\,\mathrm{e}^{-x}$.
De l'autre, $g(x) = -x - \frac{2\ln(x)}{x} \Rightarrow g'(x) = -1 - \frac{\frac{2}{x} \times x - 2\ln(x) \times 1}{x^2} = -1 - \frac{2 - 2\ln(x)}{x^2}$, et donc, en remplaçant x par e^x : $g'(\mathrm{e}^x) = -1 - \frac{2 - 2\ln(\mathrm{e}^x)}{\mathrm{e}^{2x}} = -1 - \frac{2-2x}{\mathrm{e}^{2x}} = -1 - 2\mathrm{e}^{-2x} + 2x\,\mathrm{e}^{-2x}$.
Conclusion : $k'(x) \neq g'(\mathrm{e}^x)$.

Remarque : on pouvait aussi utiliser la formule $(k(v(x)))' = v'(x) \times k'(v(x))$ qui ne figure plus dans les programmes mais qu'il est intéressant de connaître.
Elle donnait ici : $k(x) = g(\mathrm{e}^x)$ donc $k'(x) = e^x \times g'(\mathrm{e}^x)$.

6 Questions ++

A) **Réponse b** : $\boxed{f(x) = \ln x + k \text{ convient pour tout } k \in \mathbb{R}}$
Il faut bien lire toutes les questions avant de répondre : en vérité, $f(x) = \ln x + k$ convient pour tout $k \in \mathbb{R}$.
En effet, alors, $f(x \times \mathrm{e}) = \ln(x \times \mathrm{e}) + k = \ln(x) + 1 + k = f(x) + 1$. En conséquence de quoi la réponse a est fausse : la fonction $f(x) = \ln x$ n'a pas l'exclusivité ! Quant à la c, elle est fausse car $\mathrm{e}^{x \times \mathrm{e}} = \mathrm{e}^x \mathrm{e}^\mathrm{e} \neq e^x + 1$, et la d aussi car du coup si $f(x) = \ln x + k$ alors $f(1) = \ln(1) + k = k$ donc $f(1)$ peut être égal à n'importe quel réel.

B) **Réponse a** : $\boxed{\text{pour tout } x > 0 \text{ tel que } f'(x) \neq 0, \text{ on a : } \dfrac{f'(\mathrm{e} \times x)}{f'(x)} = \dfrac{1}{\mathrm{e}}}$
On ne peut théoriquement pas répondre à partir de la donnée $f(x) = \ln x + k$ car il existe peut-être d'autres solutions. Il faut donc, toujours en toute théorie, partir de la relation de départ.
Si l'on dérive l'équation fonctionnelle $f(x \times \mathrm{e}) = 1 + f(x)$, on obtient :
$\mathrm{e} \times f'(x \times \mathrm{e}) = f'(x) \Leftrightarrow \dfrac{f'(x\mathrm{e})}{f'(x)} = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ donc a est vraie et b est fausse.
Bien sûr la c est erronée. Quant à la d, on voit bien que pour les fonctions $f(x) = \ln x + k$ on a $f'(\mathrm{e}) = 0$. Il est donc faux de dire dans le cas général que « forcément $f'(\mathrm{e}) = 0$ ».

Remarque : bien noter, pour la culture générale, que les assertions a et d se présentent comme des conditions nécessaires (« il faut que... ») tandis que les assertions b et c se présentent comme des conditions suffisantes (« il suffit que... »).
Remarque : quant à savoir s'il existe d'autres fonctions que $f(x) = \ln x + k$ vérifiant la relation, c'est un problème hors-programme qui s'inscrit dans le cadre de ce que l'on appelle les *équations fonctionnelles* (équations dont les inconnues sont des fonctions).

C) **Réponse d** : $\boxed{f(x \times \mathrm{e}^n) = n + f(x)}$
Le plus simple est de partir de la réponse du A).
Si $f(x) = \ln x + k$ alors :
$f(x \times n\mathrm{e}) = \ln(xn\mathrm{e}) + k = \ln x + \ln n + 1 + k = f(x) + \ln n + 1 \neq n f(x) + 1$ donc a est fausse.
$f(x^n \times \mathrm{e}) = \ln(x^n \mathrm{e}) + k = n \ln(x) + 1 + k$ tandis que $n + f(x) = n + \ln x + k$ donc b est fausse.
$f(x^n \times \mathrm{e}) = \ln(x^n \mathrm{e}) + k = n \ln x + k + 1$ tandis que $1 + n f(x) = n(\ln(x) + k) + 1$ donc c est fausse.
$f(x \times \mathrm{e}^n) = \ln x + \ln \mathrm{e}^n + k = \ln x + n + k = n + f(x)$ donc cette réponse **d** est la bonne réponse.

Remarque :

- Comme dans la question précédente, partir de $f(x) = \ln x + k$ ne peut constituer une démonstration que si l'on procède par élimination.
  Si l'on veut rigoureusement montrer que la proposition d est vraie, il faut théoriquement partir de l'équation de départ, car il y a peut-être d'autres fonctions vérifiant la relation $f(x \times \mathrm{e}) = f(x) + 1$.
- La démonstration générale du d, pour info est la suivante.
  On demande si $f(x \times \mathrm{e}^n) = n + f(x)$:
  → c'est vrai en $n = 0$ évidemment, et en $n = 1$ d'après l'énoncé ;
  → si on suppose que c'est vrai pour une certaine valeur de n, alors, en remplaçant x par $x\mathrm{e}$, on a donc :
  $f(x\mathrm{e} \times e^n) = n + f(x\mathrm{e}) \Leftrightarrow f(x \times \mathrm{e}^{n+1}) = n + f(x \times \mathrm{e}) = n + (1 + f(x)) = (n+1) + f(x)$,
  d'où l'hérédité ;
  → c'est donc vrai pour tout $n \geqslant 0$.

D) **Réponse b** : $\boxed{g(x) = k\mathrm{e}^{mx} + p \text{ convient, avec } k, m > 0 \text{ et } p \in \mathbb{R} \text{ et } I = \mathbb{R}}$
a est fausse car $g(x) = \mathrm{e}^x$ conviendrait certes, mais la suite de l'énoncé nous montre qu'il y a aussi d'autres possibilités.
b est juste car si $g(x) = k\mathrm{e}^{mx} + p$, alors $g'(x) = km\mathrm{e}^{mx}$, $g''(x) = km^2\mathrm{e}^{mx}$ et ainsi de suite :

$$g^{(n)}(x) = km^n \mathrm{e}^{mx}.$$

Ainsi, oui, toutes les dérivées successives de g sont à valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}$.
c est fausse car si $g(x)=\frac{1}{x}$, alors $g'(x)=-\frac{1}{x^2}$, négatif partout où c'est défini.

Remarque : cette question permet, en réfléchissant un peu, de voir que $c(x)=-\frac{1}{x}$, avec $I=]-\infty;0[$, aurait pu convenir. En effet, on aurait alors $c'(x)=\frac{1}{x^2}$, strictement positif partout, puis $c''(x)=\frac{-2}{x^3}$, positif dans $]-\infty,0[$, $c'''(x)=\frac{2\times 3}{x^4}$, positif partout, puis $c^{(4)}(x)=\frac{-3\times 3\times 4}{x^5}$, positif dans $]-\infty;0[$, etc.

E) **Réponse d** : $\boxed{\text{aucune des trois}}$
Le questionnement, en mathématiques, est toujours salutaire. Notre petit approfondissement sur la réponse c précédente nous permet d'avoir plusieurs exemples de fonctions g maintenant. On a :

- $g(x)=\mathrm{e}^x+p$ avec p un réel quelconque, et $I=\mathbb{R}$, puis :
- $g(x)=k\,\mathrm{e}^{mx}+p$, avec des réels k, $m>0$ et p quelconque, et $I=\mathbb{R}$, et enfin :
- $c(x)=\frac{-1}{x}$ avec $I=]-\infty;0[$.

Cela va nous aider à répondre :
a est fausse (prendre $g(x)=-\frac{1}{x}$) ;
b est fausse (prendre $g(x)=\mathrm{e}^x-1$ sur $I=\mathbb{R}$) ;
c est fausse (prendre $g(x)=\mathrm{e}^{2x}$) ;
Donc aucune des trois propositions précédentes n'est vraie.

Remarque : cette question était là pour vous montrer que si l'on part d'une propriété, et qu'on trouve une fonction possible vérifiant cette propriété, il faut bien faire attention que cette « fonction possible » n'est pas forcément la seule.

7 QCM alternatifs (de 0 à 4 réponses justes)

A) $\boldsymbol{\alpha,\gamma,\delta}$ sont justes.
α est juste : on applique la formule $x=\ln \mathrm{e}^x$ puis la formule $\ln a+\ln b=\ln(ab)$ et l'on trouve :
$f(x)+x=\ln(1-\mathrm{e}^{-x})+x=\ln(1-\mathrm{e}^{-x})+\ln(\mathrm{e}^x)=\ln((1+\mathrm{e}^{-x})(\mathrm{e}^x))=\ln(\mathrm{e}^x+1)$.
β est fausse : elle semble supposer que $\ln(a-b)$ serait comme $\ln(a)-\ln(b)$.
Pour démontrer qu'elle est fausse, remarquons que la quantité $\ln(1)-\ln(\mathrm{e}^{-x})$ est définie sur $\mathbb{R}$ (car on a toujours $\mathrm{e}^{-x}>0$ donc $\ln \mathrm{e}^{-x}$ défini), tandis que $\ln(1-\mathrm{e}^{-x})$ est définie pour $1-\mathrm{e}^{-x}>0 \Leftrightarrow 1>\mathrm{e}^{-x}\Leftrightarrow x>0$. Ces deux quantités ne peuvent donc être égales.
γ est juste : on part du résultat en appliquant la formule de collège $\frac{a-b}{c}=\frac{a}{c}-\frac{b}{c}$:

$$\ln\left(\frac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x}\right)=\ln\left(\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}-\frac{1}{\mathrm{e}^x}\right)=\ln(1-\mathrm{e}^{-x}).$$

δ est juste : on part du résultat et on applique $A=\ln \mathrm{e}^A$ et $\ln a-\ln b=\ln\frac{a}{b}$:

$$\ln(\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x)-2x=\ln(\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x)-\ln \mathrm{e}^{2x}=\ln\frac{\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}}=\ln\left(\frac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{2x}}-\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}}\right)=\ln(1-\mathrm{e}^{-x}).$$

B) $\boldsymbol{\alpha,\beta,\delta}$ sont justes.
α La limite de $f(x)$ en 0^+ est indéterminée car $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln(x)=-\infty$.
On lève l'indétermination en mettant tout au même dénominateur : $f(x)=\frac{1+x\ln x}{x}$.
$\lim\limits_{x\to 0^+}1+x\ln x=1$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}x=0$, donc par quotient, $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1+x\ln x}{x}=+\infty$.
β Aucune indétermination ici lorsque x tend vers 0^+, la limite est de la forme « $+\infty+\infty$ », qui donne $+\infty$ par addition.
γ On a une forme indéterminée « $+\infty-\infty$ », donc pour lever l'indétermination on met au même dénominateur et on obtient : $f(x)=\frac{x-1}{x^2}$.
Donc $\lim\limits_{x\to 0^+}x-1=-1$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}x^2=0^+$ d'où, par quotient, $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x-1}{x^2}=-\infty$.
Cette réponse est fausse.
δ On a $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{\ln x}=0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln\left(\frac{1}{x}\right)=+\infty$. Donc, par somme, $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=+\infty$.

C) β et δ sont justes.
α C'est bon pour $\lim\limits_{x\to 0} f=+\infty$ (voir question B) mais $f(x)-x=\dfrac{1}{x}+\ln x-x$ a pour limite $-\infty$ lorsque $x\to+\infty$. Cette réponse est donc fausse.
β C'est bon pour $\lim\limits_{x\to 0} f=+\infty$ car lorsque x tend vers 0^+, on a $1+x$ qui tend vers 1^+, donc $\ln(1+x)$ tend vers 0^+, et donc son inverse tend vers $+\infty$. Pour l'asymptote oblique, c'est bon car $f(x)-x=\dfrac{1}{\ln(1+x)}$ de limite nulle lorsque x tend vers $+\infty$.
γ C'est bon pour $\lim\limits_{x\to 0} f=+\infty$. En revanche, ce n'est pas bon pour l'asymptote oblique car $f(x)-x=\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)=-\ln x$ qui ne tend pas vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.
Cette réponse est fausse.
δ C'est bon pour $\lim\limits_{x\to 0} f=+\infty$. Ensuite on a :
$f(x)-x=\dfrac{1}{x^2}+\ln(1+\mathrm{e}^x)-\ln(\mathrm{e}^x)=\dfrac{1}{x^2}+\ln\left(\dfrac{1+\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}\right)=\dfrac{1}{x^2}+\ln(\mathrm{e}^{-x}+1)$ et ceci tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

Remarque : lorsque $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=0$, on dit que la droite d'équation $y=x$ est *asymptote oblique* à C_f au voisinage de $+\infty$.

D) α et γ sont justes.
α Si $F(x)=x\ln x$ alors on a $F'(x)=f(x)=\ln x+1$ qui définit une fonction croissante sur $]0;+\infty[$.
β Si $F(x)=(x-1)\ln x$, alors $F'(x)=f(x)=\ln x+\dfrac{x-1}{x}=\ln x+1-\dfrac{1}{x}$. Pour en voir les variations, on dérive f: $f'(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}$ toujours positif dans $]0;+\infty[$ donc c'est faux.
γ $F(x)=\dfrac{x^2}{4}(2\ln x-3)$ implique :
$F'(x)=f(x)=\dfrac{x}{2}(2\ln x-3)+\dfrac{x^2}{4}\left(\dfrac{2}{x}\right)=x\ln x-\dfrac{3x}{2}+\dfrac{x}{2}=x\ln x-x$,
d'où $f'(x)=\ln x+1-1=\ln x$ qui est négatif dans $]0;1[$ et positif dans $]1;+\infty[$.
δ F n'est pas forcément décroissante : il suffit de prendre $f(x)=(\ln x)^2$ ou $f(x)=(x-1)^2$. Les deux sont positives et ont donc des primitives croissantes.

E) α et γ sont justes.
Ici, il faut voir si les fonctions proposées vérifient $f'(x)$ négatif dans $]0,1[$ et positif dans $]1;+\infty[$:
α $f'(x)=x\ln x$, ceci est du signe de $\ln x$, donc négatif dans $]0;1[$ et positif dans $]1;+\infty[$.
β $f'(x)=\dfrac{1}{x}+\ln x$ de limite $+\infty$ lorsque x tend vers 0^+ (voir question B) ne peut pas être négative dans $]1;+\infty[$.
γ $f'(x)=\ln x$, ceci négatif dans $]0;1[$ et positif dans $]1;+\infty[$.
δ l'énoncé nous dit que $f'(x)$ négatif dans $]0,1[$ et positif dans $]1;+\infty[$, alors soit $a\in]0,1[$ et $b>1$ on a donc $f(a)\leqslant 0\leqslant f(b)$, alors que, si f était vraiment strictement décroissante, on devrait avoir $f(a)>f(b)$.

8 Familles, algo et récurrences

A) **Réponse** a : $\boxed{\text{La fonction } f_3 \text{ admet un maximum égal au maximum de la fonction } f_{33}}$

On obtient $f_n'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}nx-\ln(nx)n}{(nx)^2}=\dfrac{n-n\ln(nx)}{(nx)^2}=\dfrac{1-\ln(nx)}{n\,x^2}$, ceci s'annule pour :

$$1-\ln(nx_n)=0\Leftrightarrow\ln(nx_n)=1\Leftrightarrow x_n=\frac{\mathrm{e}}{n}.$$

Donc :

a est juste, car le maximum de f_n est $f_n\left(\dfrac{\mathrm{e}}{n}\right)=\dfrac{\ln\left(n\times\frac{\mathrm{e}}{n}\right)}{n\times\frac{\mathrm{e}}{n}}=\dfrac{\ln(\mathrm{e})}{\mathrm{e}}=\dfrac{1}{e}$, qui ne dépend pas de n, et ainsi : toutes les f_n ont le même maximum (mais pas forcément à la même abscisse bien sûr).
b est fausse, car l'une des deux fonctions admet un maximum en $\dfrac{\mathrm{e}}{3}$, et l'autre en $\dfrac{\mathrm{e}}{33}$.

c est fausse, car on ne peut pas simplifier par n.
d est fausse, voir le calcul ci-dessus.

B) **Réponse b** : $\boxed{\text{le nombre } f_n'(1-n) \text{ ne dépend pas de } n}$

a est fausse, car $f_n'(x)=\dfrac{1}{n+x}$ d'où $f'(0)=\dfrac{1}{n}$ qui dépend de n.

b est juste, car $f_n'(1-n)=\dfrac{1}{\cancel{n}+1-\cancel{n}}=1$ ne dépend pas de n.

c est fausse, car $f_n'(1+n)=\dfrac{1}{1+2n}$ dépend de n.

d est fausse, car $f_n'(\mathrm{e}^n-n)=\dfrac{1}{n+\mathrm{e}^n-n}=\mathrm{e}^{-n}$ dépend de n.

C) **Réponse a** : $\boxed{\text{la fonction } F_n(x)=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\ln(x)-\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)^2} \text{ est une primitive de } f_n}$

En effet, $F_n'(x)=x^n\ln x+\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\times\dfrac{1}{x}-\dfrac{(n+1)x^n}{(n+1)^2}=x^n\ln x+\cancel{\dfrac{x^n}{n+1}}-\cancel{\dfrac{x^n}{n+1}}=x^n\ln x$.

b est fausse car $f_n'(x)=x^n\times\dfrac{1}{x}+nx^{n-1}\times\ln x=x^{n-1}+nx^{n-1}\times\ln x$ et le second terme n'est pas identiquement nul.
c est fausse car $f_n'(x)=x^{n-1}(1+n\ln x)$ et donc :

$$f_n'\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}}\right)=\left(\mathrm{e}^{-\frac{n-1}{n}}\right)\left(1+n\ln\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}}\right)\right)=\mathrm{e}^{\frac{1}{n}-1}\left(1+n\left(-\frac{1}{n}\right)\right)=0.$$

d est fausse, car $f_n\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}}\right)=\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}}\right)^n\ln\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}}\right)=\mathrm{e}^{-1}\times\left(-\dfrac{1}{n}\right)=-\dfrac{1}{\mathrm{e}\times n}$ dépend de n.

D) **Réponse c** : $\boxed{\sum_{k=1}^{n} f(k)=\dfrac{n}{n+1}+\ln(n+1)}$

Les réponses a et b sont fausses et en fait on aurait : $f(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}+\ln(x+1)-\ln x$. Il faut bien le voir car cela nous sert pour la suite :
c est juste car :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} f(k) &= \left(1-\cancel{\tfrac{1}{2}}\right)+\cancel{\ln 2}-\ln 1\\ &+ \left(\cancel{\tfrac{1}{2}}-\cancel{\tfrac{1}{3}}\right)+\cancel{\ln 3}-\cancel{\ln 2}\\ &+ \left(\cancel{\tfrac{1}{3}}-\tfrac{1}{4}\right)+\ln 4-\cancel{\ln 3}\\ &+ \ldots\\ &+ \left(\cancel{\tfrac{1}{n-1}}-\cancel{\tfrac{1}{n}}\right)+\cancel{\ln n}-\cancel{\ln(n-1)}\\ &+ \left(\cancel{\tfrac{1}{n}}-\tfrac{1}{n+1}\right)+\ln(n+1)-\cancel{\ln n},\end{aligned}$$

d'où $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k)=1-0-\frac{1}{n+1}+\ln(n+1)=\frac{n+1-1}{n+1}+\ln(n+1)=\frac{n}{n+1}+\ln(n+1)$.
d est fausse car :

$$\sum_{k=1}^{2} f(k)=f(1)+f(2)=\frac{1}{2}+\ln(2)+\frac{1}{6}+\ln\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{3}+\ln(2)+\ln(3)-\ln(2)=\frac{2}{3}+\ln(3).$$

E) **Réponse a** : $\boxed{f(x)=\ln x}$

Il s'agit de la méthode d'Euler avec un pas $h=0,1$ et $\begin{cases} f'(x)=\dfrac{1}{x} \\ f(1)=0\end{cases}$.

F) **Réponse c** : $\boxed{f(x)=\sqrt{x}}$

On prend cette fois-ci $f'(x)=\dfrac{1}{2f(x)}$:
$2f(x)f'(x)=1$, or $2f(x)f'(x)$ est la dérivée de $(f(x))^2$ et donc on aurait $\begin{cases}(f(x))^2=k+x\\ f(1)=1\end{cases}$ d'où $f(x)=\sqrt{x}$.

9 Réflexion autour d'un thème mathématique

Thème : l'**ensemble de définition**.

A) **Réponse b** : $\boxed{\text{dans }]0;+\infty[,\ g \text{ et } f \text{ diffèrent par une constante}}$

On a $f(x)=\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)=\ln(x+1)-\ln(x)$ dans $]0;+\infty[$

(et $f(x)=\ln\left(\dfrac{-x-1}{-x}\right)=\ln(-x-1)-\ln(-x)$ dans $]-\infty;-1)$ donc :

a est fausse, puisque $f'(x)=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x}$.

Remarque : on peut mettre au même dénominateur $f'(x)=\dfrac{x-(x+1)}{x(x+1)}=\dfrac{-1}{x(x+1)}$.

b est juste puisque dans ce cas on a $g'=f'$ et donc $(g-f)'=0$ et donc $g-f$ est une fonction constante.

Remarque : l'énoncé a précisé « dans $]0;+\infty[$ » car on pourrait très bien avoir $g-f=C_1^{\text{ste}}$ dans $]0;+\infty[$ et $g-f=C_2^{\text{ste}}$ dans $]1;+\infty[$.

c est fausse car $D_f=\mathbb{R}\backslash\{-1;0\}$ non $D_f=]-\infty;-1[\cup]0;+\infty[$.

d est fausse car $\lim\limits_{x\to+\infty}(x\times f(x))=+\infty$. Faux car si on pose $X=\dfrac{1}{x}$ alors on a :

$$\lim_{x\to+\infty}(x\times f(x))=\lim_{x\to+\infty}x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=\lim_{X\to0}\frac{\ln(1+X)}{X}=1.$$

B) **Réponse b** : $\boxed{\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x^2}\times f(x)\right)=+\infty}$

On pose $X=\dfrac{1}{x^2}$:

a est fausse, car $\lim\limits_{x\to0}(x^2\times f(x))=\lim\limits_{x\to0}x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)=\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{\ln(1+X)}{X}=0$.

b est juste, $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x^2}\times f(x)\right)=\lim\limits_{X\to+\infty}(X\times\ln(1+X))=+\infty$.

c est fausse, car $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{x^2}{f(x)}\right)=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{x^2}{\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}\right)=\lim\limits_{X\to+\infty}\left(\dfrac{1}{X\ln(1+X)}\right)=0$.

d est fausse, car $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x^2f(x)}\right)=\lim\limits_{X\to0}\left(\dfrac{X}{\ln(1+X)}\right)=1$.

C) **Réponse c** : $\boxed{D_f=]\mathrm{e};+\infty[}$

En effet, $\ln x$ est défini pour $x>0$.

Maintenant, $\ln(\ln x)$ est défini lorsque $\ln x>0$ soit $x>1$.

Et, enfin, $\ln(\ln(\ln x))$ est défini lorsque $\ln(\ln x)>0$ soit $\ln x>1$ soit $x>\mathrm{e}$.

D) **Réponse d** : $\boxed{f_4(x)=\ln((x+9)(x-1))+\ln((x-9)(x+1))}$

a est fausse, car $D_{f_1}=]9;+\infty[$.

b est fausse, car $D_{f_2}=]-1;1[\cap]9;+\infty[=\varnothing$.

c est fausse, car $D_{f_3}=]-\infty;-1[\cup]1;9[$. On le trouve par un tableau de signes :

x	$-\infty$ -1	1	9	$+\infty$
$x-9$	$-$	$-$	$-$	$+$
$1-x^2$	$-$	$+$	$-$	$-$
$(x-9)(1-x^2)$	$+$	$-$	$+$	$-$

d est juste, on le trouve par élimination. Voici le détail du calcul, pour bien comprendre :

x	$-\infty$ -9	-1	1	9	$+\infty$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x+9$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
$(x-1)(x^2+9)$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$

donc le premier terme en $\ln((x^2-81)(x-1))$ est défini dans $]-\infty;-9[\cap]1;+\infty[$, et :

x	$-\infty$ -9	-1	1	9	$+\infty$
$x+1$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-9$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
$(x+1)(x+9)$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$

donc le second terme en $\ln((x+9)(x+1))$ est défini dans $]-\infty;-1[\cap]9;+\infty[$.

Ainsi, en prenant l'intersection, $D_{f_4}=]-\infty;-9[\cup]9;+\infty[$.

Remarque : la fonction $x \mapsto \ln((x+9)(x-1)(x-9)(x+1))$ semble être la même que f_4 en vertu de la formule $\ln(a\,b) = \ln(a) + \ln(b)$, cependant, elle, elle serait définie aussi, en plus, dans $]-1;1[$ par la règle des signes.

E) **Réponse d** : $\boxed{\text{il y a des fonctions dont l'ensemble de définition est vide}}$

a est fausse, pour comprendre il suffit de prendre le contre exemple $f(x) = \frac{x}{x}$, défini pour tout x non nul, et donc non défini pour $x = 0$. Alors la limite de $f(x)$ quand $x \to 0$ est égale à 1 puisque $f(x) = C^{\text{ste}} = 1$.
b est fausse, voir le contre exemple précédent.
c est fausse, car il suffit de prendre $f(x) = \mathrm{e}^x$, alors $g \circ f$ a pour ensemble de définition $\mathbb{R}$, tandis que $f \circ g$ a pour ensemble de définition $]0;+\infty[$.
d est juste, il suffit de regarder les fonctions f ou g définies par $f(x) = \ln(-x^2)$ et $g(x) = \sqrt{-1-x^2}$: elles ne sont définies pour aucun réel.

Remarque :

- ne pas confondre l'ensemble des x où $f(x)$ est définie, noté D_f et appelé *ensemble de définition* de f, avec l'ensemble sur lequel on définit f. Par exemple la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x}$ a pour ensemble de définition $D_f = \mathbb{R}^*$, mais un énoncé peut donner « soit f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x}$ » parce qu'il n'a besoin de travailler que sur cet intervalle ;
- parfois l'ensemble de définition s'élargit si l'on modifie l'écriture de f. Par exemple « soit f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{x}{x}$ ». On voit que l'on peut écrire $f(x) = 1$ et cette nouvelle écriture est clairement définie sur $\mathbb{R}$. Il n'en reste pas moins que l'écriture $f(x) = \frac{x}{x}$ n'est définie que sur $\mathbb{R}^*$ donc $D_f = \mathbb{R}^*$. Le lecteur intéressé pour formaliser son intuition pourra faire des recherches au mot-clé *prolongement par continuité* ;
- en ayant recours aux complexes et à des notions plus élaborées que les simples fonctions, on peut donner du sens à f ou g définies par $f(x) = \ln(-x^2)$ et $g(x) = \sqrt{-1-x^2}$ (niveau Master).

F) **Réponse a** : $\boxed{D_f =]1;2[\cup]2;+\infty[}$

En effet il faut $x > 1$ pour que le $\ln(x-1)$ soit défini et d'autre part que ce $\ln(x-1)$ soit non nul donc $x - 1 \neq 1$.

10 Rédactions d'élèves imaginaires...

A) Réponses :

α) | | **F** |

Le produit de deux fonctions croissantes ne définit pas toujours une fonction croissante ; un exemple très simple sur $\mathbb{R}$ est $f(x) = x$ multiplié par lui même.

Ici, On peut aussi remarquer que $f'(x) = \ln x + 1$, et que ceci est négatif entre 0 et $\frac{1}{\mathrm{e}}$.
Ainsi, f n'est pas une fonction croissante, bien que $x \mapsto x$ et $x \mapsto \ln x$ le soient.

β) | | **F** |

C'est une erreur typique de compréhension des limites. « Zéro fois quelque chose » ne fait pas toujours zéro, cela dépend si le mot « zéro » désigne le nombre 0 ou la limite 0 et si le mot « quelque chose » désigne un nombre ou une limite pouvant valoir ∞.

Exemple typique : $f(x) = x \times \frac{1}{x}$ lorsque $x \to 0^+$ est de la forme « $0 \times +\infty$ ».
Ici, il se trouve que $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x = 0$.

γ) | **V** | |

Cette réponse est exacte comme le prouve le tableau de variations, f s'annule en 1 et c'est tout.

δ) | | **F** |

On a ici une erreur classique de dérivée d'un produit.
$f(x) = x \ln x$ donc, $f(x) = u \times v$ avec $u(x) = x$ et $v(x) = \ln x$ donc $u'(x) = 1$ et $v'(x) = \frac{1}{x}$,
d'où $f'(x) = u'v + uv' = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} = \ln x + 1$.

B) Réponses :

$\alpha)$ | | **F** |

Erreur classique on ne peut pas barrer les 2.

On a $\dfrac{\ln(2x)}{2x}=\dfrac{\ln 2+\ln x}{2x}$ et la simplification annoncée est fausse.

$\beta)$ | **V** | | car tout simplement, pour tous réels $a,b\neq 0$ on a : $\dfrac{a}{b}=a\times\dfrac{1}{b}$

$\gamma)$ | | **F** |

Faux, le quotient de deux fonctions monotones ne l'est pas forcément, ici $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$ donc $f'(x)$ est du signe de $1-\ln x$ donc f est croissante dans $]0;\mathrm{e}[$ et décroissante dans $]\mathrm{e};+\infty[$: f n'est donc pas monotone.

$\delta)$ | | **F** |

Les limites sont justes mais le raisonnement est faux. Cette fonction en consitue un contrexemple (regarder son tableau de variations). Si une fonction a pour limites $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, il n'y a aucune raison qu'elle soit croissante partout entre ces deux bornes.

11 Exercices avec graphiques

A) **Réponse a** : $\boxed{I \text{ a pour coordonnées } \left(\dfrac{a+b}{2},\ln\sqrt{ab}\right)}$

a est juste car I a pour coordonnées $\left(\dfrac{a+b}{2};\dfrac{\ln(a)+\ln(b)}{2}=\dfrac{\ln(ab)}{2}=\ln\sqrt{ab}\right)$.

b est fausse car on a $J\big(\ln\sqrt{ab},\ln\sqrt{ab}\big)$ puis $K\big(\ln\sqrt{ab},\mathrm{e}^{\ln\sqrt{ab}}=\sqrt{ab}\big)$ puis $C\big(\sqrt{ab},\sqrt{ab}\big)$.

c est fausse car si B bouge et si A, pendant ce temps, reste fixe, alors J bouge donc l'angle (AJ) aussi. On peut aussi prendre $a=1$ et alors $J\big(\ln\sqrt{b},\ln\sqrt{b}\big)$ donc $\overrightarrow{AJ}\big(\ln\sqrt{b}-1,\ln\sqrt{b}\big)$. La droite $(JC)=C_h$ ayant pour vecteur directeur $\vec{u}(1,1)$, alors $\overrightarrow{AJ}\perp\overrightarrow{JC}\Leftrightarrow\overrightarrow{AJ}\cdot\vec{u}=0\Leftrightarrow 2\ln\sqrt{b}=1\Leftrightarrow b=\mathrm{e}$.

Par conséquent, pour $a=1$ et $b\neq\mathrm{e}$, (AJ) et (JC) ne sont pas perpendiculaires.

d est fausse car KJC est isocèle par construction. En effet, si $K(x_k;y_k)$ alors $J(x_k;x_k)$ et $C(y_k;y_k)$ d'où $KJ=KC=|y_k-x_k|$.

B) **Réponse b** : $\boxed{(\ln(u);u)}$

En effet, $U(u,\ln u)$ donc V, son symétrique par rapport à la première bissectrice, a simplement les coordonnées interverties.

C) **Réponse b** : $\boxed{y=\ln(a)+a-x}$

Le point $U(u,\ln u)$ est sur (UV), cela élimine a et d.

La pente de (UV) est -1 d'où la réponse **b**.

Effectuons le calcul pour bien comprendre. Soit $M(x,y)$ et $\vec{u}(1,1)$

$$\begin{aligned} M\in(UV) &\Leftrightarrow \overrightarrow{UM}\perp\vec{u}\\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{UM}(x-u,y-\ln u)\perp\vec{u}(1,1)\\ &\Leftrightarrow x-u+y-\ln u=0\\ &\Leftrightarrow y=u+\ln u-x.\end{aligned}$$

D) **Réponse c** : $\boxed{\sqrt{2}\times|u-\ln u|}$

En effet, la distance UV vaut, par Pythagore :

$UV=\sqrt{(\ln u-u)^2+(u-\ln u)^2}=\sqrt{2(u-\ln u)^2}=\sqrt{2}\times|u-\ln u|$.

Remarque :

- on pouvait éliminer le b qui n'est pas toujours positif (une distance doit l'être) ;
- le a donne la distance entre U (ou V) et le centre du repère.

Chapitre 5

Énoncés - Exponentielle

Dans tous les exercices de ce chapitre : on appelle C_f la courbe représentative de la fonction f. De même pour C_g, C_h, etc.

1 Révisions immédiates du cours

A) $e^{2x}e^{-3x}$ peut se simplifier en :

a	b	c	d
e^{-x}	e^{-6x^2}	$e^{2x}+e^{-3x}$	aucune des trois

B) $\dfrac{e^{2x}}{e^1 - x^2}$ peut se simplifier en :

a	b	c	d
$\dfrac{2x}{e^{e^1 x^2}}$	$e^{2x}-e^{1-x^2}$	e^{x^2+2x-1}	aucune des trois

C) L'une des trois quantités suivantes a une valeur négative pour tout $x \in \mathbb{R}$:

a	b	c	d
$-e^{-x}$	e^{-x}	$(-e^{-x})^2$	$e-e^x$

D) On peut dire que pour toute fonction f :

a	b	c	d
$e^{f(x)}$ est toujours du même signe de $f(x)$	la fonction $x \mapsto e^{f(x)}$ est croissante	la fonction $x \mapsto e^{f(x)}$ a les mêmes variations que f	aucune des trois

E) L'une des fonctions suivantes a pour limite 0 lorsque que x tend vers $+\infty$:

a	b	c	d
$u(x)=e^x+e^{-x}$	$u(x)=e^x \times e^{-x}$	$u(x)=\dfrac{e^x}{e^{-x}}$	$u(x)=e^{-e^x}$

F) La dérivée de $f(x)=x^2e^{-x}$ est :

a	b	c	d
$f'(x)=-2x\,e^{-x}$	$f'(x)=\dfrac{x^2}{e^x}$	$f'(x)=\dfrac{x(2-x)}{e^x}$	$f'(x)=2x\,e^{-x}+x^2\times(-x)e^{-x}$

G) On pose $f(x)=e^{-\frac{x}{2}}-1$. Alors :

a	b	c	d
$[0;+\infty[$	$]-\infty;0]$	$\mathbb{R}$	aucune des trois

2 Premières applications

A) L'équation $e^{\sqrt{-1-x^2}} \geqslant 0$

a	admet $\mathbb{R}$ comme solution car une exponentielle est toujours positive
b	admet l'ensemble vide comme solution
c	admet comme solution l'ensemble $]-\infty;-1]\cup[1;+\infty[$
d	admet comme solution l'intervalle $[-\ln 1;\ln 1]$

B) $e^{(1+x)^2}$ peut aussi s'écrire :

a	**b**	**c**	**d**
$(e^{x+1})^2$	$\dfrac{e^{1+x^2}}{e^{-2x}}$	$e^{2^{1+x}}$	$e^{1+x}+e^{1+x}$

C) Si $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ alors on affirme que :

a	**b**	**c**	**d**
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(e^x)=0$	$\lim\limits_{x\to-\infty} e^{f(x)}=0$	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(-e^x)=0$	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(-e^{-x})=0$

D) La dérivée de $g(x)=xe^{\frac{1}{x}}$ est :

a	**b**	**c**	**d**
$h(x)=e^{\frac{1}{x}}$	$h(x)=-\dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$	$\dfrac{x-1}{x}e^{\frac{1}{x}}$	aucune des trois

E) On pose, pour $x\neq 0$, $f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}$. Alors :

a	**b**	**c**	**d**
$f'(x)=\dfrac{1}{x}e^{-\frac{1}{x^2}}$	f est croissante sur $\mathbb{R}$	$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$	pour tout $x\neq 0$, on a $\dfrac{1}{f(x)}=e^{-x^2}$

F) Toutes les fonctions f suivantes vérifient $\lim\limits_{+\infty} f=3$ sauf une, laquelle ?

a	**b**	**c**	**d**
$f(x)=\dfrac{3e^{-x}+x}{x^2e^{-x}}$	$f(x)=\dfrac{4e^{-x}+3x^2}{x^2+e^{-x}}$	$f(x)=\dfrac{e^{2x}+x^2}{e^x\left(\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{e^x}{3}\right)}$	$f(x)=\dfrac{3e^x+e^{-x}}{e^x+3e^{-x}}$

G) La quantité $u(x)=\dfrac{e^{-x}-2}{-2-4e^{-x}}$ peut aussi s'écrire :

a	**b**	**c**	**d**
$u(x)=\dfrac{e^{-x}}{-4e^{-x}}$	$u(x)=\dfrac{e^x-2}{-2-4e^x}$	$u(x)=\dfrac{-2}{-2-4e^x}$	$u(x)=\dfrac{1-2e^x}{-2e^x-4}$

H) La fonction F a pour dérivée $f(x)=e^{-\frac{x}{2}}-1$. Alors F peut avoir pour expression :

a	$F(x)=-0,5e^{-0,5x}-x+1,5$
b	$F(x)=-2e^{-0,5x}-x-3$
c	$F(x)=\dfrac{1}{2}e^{\frac{x^2}{2}}-1$
d	$F(x)=xe^{\frac{x}{2}}-x$

3 Questions de logique

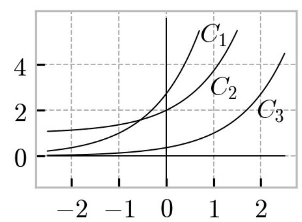
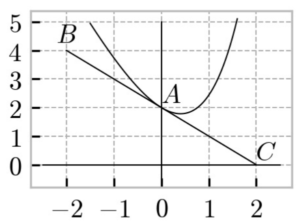
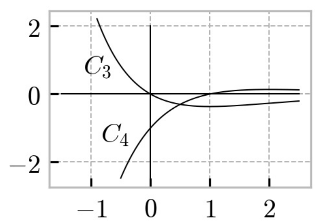
A) On suppose que $f(\mathrm{e}^{-x}) > 0$ pour tout $x > 0$.
Alors :

a	forcément $f\left(\frac{1}{2}\right) > 0$
b	il est possible que $f\left(\frac{\mathrm{e}}{2}\right) < 0$
c	il est possible que $f(x) > 1$ pour tout $x > 0$
d	soit ε un réel tel que $f(1+\varepsilon) > 0$, alors $\varepsilon > 0$

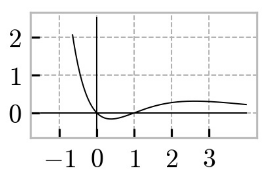
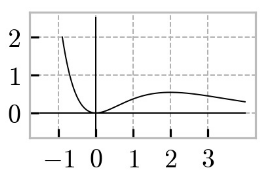
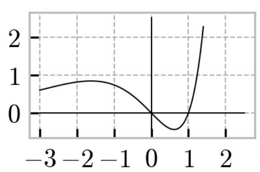
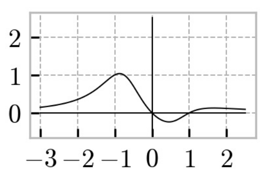
B) Soit f une fonction ne s'annulant pas et vérifiant $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{\mathrm{e}^x} = 0$.
Alors :

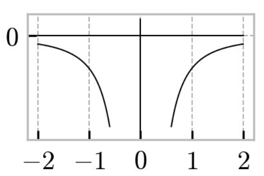
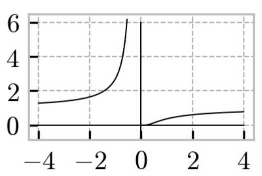
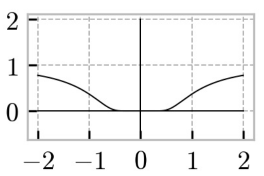
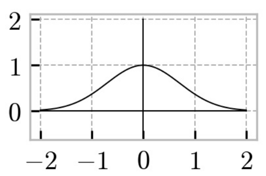
a	forcément $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{f(x)} = +\infty$
b	$f(x) = 99x + \frac{\mathrm{e}^x}{99}$ convient
c	il est possible que $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{\mathrm{e}^{-x}} = -\infty$
d	forcément $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{\mathrm{e}^{-x}} = 0$

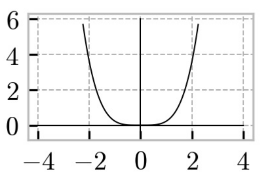
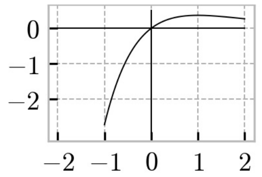
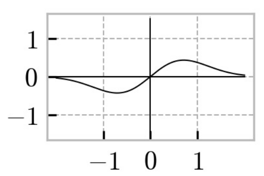
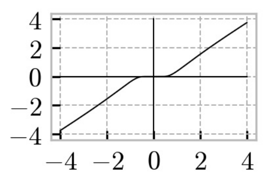
4 Questions en tableau

<table>
<tr><th>A)</th><th>B)</th><th>C)</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="4">A)La courbe représentant f définie par $f(x) = \mathrm{e}^{x+1}$ est :</td><td>a</td><td>C_1</td></tr>
<tr><td>b</td><td>C_2</td></tr>
<tr><td>c</td><td>C_3</td></tr>
<tr><td>d</td><td>la symétrique de l'une de ces trois courbes par rapport à (Ox).</td></tr>
<tr><td rowspan="4">B) Cette courbe représente la fonction f définie par $f(x) = a\,\mathrm{e}^x + b\,x$ et la tangente en 0 est tracée. Alors :</td><td>a</td><td>$a = 2$ et $b = -3$</td></tr>
<tr><td>b</td><td>$b = 2$ et $a = 2$</td></tr>
<tr><td>c</td><td>$a = -3$ et $b = 2$</td></tr>
<tr><td>d</td><td>$a = b = -1$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">C) Ces deux courbes représentent les fonctions f et g définies par :</td><td>a</td><td>$f(x) = \mathrm{e}^{-x}$ et $g(x) = x - x^2$</td></tr>
<tr><td>b</td><td>$f(x) = (1-x)\,\mathrm{e}^{-x}$ et $g = f'$</td></tr>
<tr><td>c</td><td>$f(x) = -x\,\mathrm{e}^{-x}$ et $f' = g$</td></tr>
<tr><td>d</td><td>$f(x) = -x\,\mathrm{e}^{x}$ et $g' = f$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="4">D) La fonction f définie par $f(x) = (x^2 - x)\,\mathrm{e}^{-x}$ a pour courbe :</th></tr>
<tr><th>a</th><th>b</th><th>c</th><th>d</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

E) La fonction f définie par $f(x)=\mathrm{e}^{-1/x^2}$ a pour courbe :			
a	**b**	**c**	**d**
			

F) La fonction f définie par $f(x)=x\,\mathrm{e}^{-1/x^2}$ a pour courbe :			
a	**b**	**c**	**d**
			

5 Questions Vrai/Faux

Soit f définie pour tout réel x par : $f(x)=\mathrm{e}^{-x^2}$.

Alors :

A) Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)>0$. **V** ☐ **F** ☐

B) La fonction f' est croissante sur $\mathbb{R}$. **V** ☐ **F** ☐

C) La fonction $x\mapsto\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ est décroissante sur $\mathbb{R}$. **V** ☐ **F** ☐

D) Pour tout $x\neq 0$, $\dfrac{f'(x)}{f(x)}+\dfrac{f(x)}{2}=0$. **V** ☐ **F** ☐

On pose $f(x)=\mathrm{e}^x\times\sin(x)$.

Alors :

E) $\lim\limits_{-\infty} f=0$. **V** ☐ **F** ☐

F) $\lim\limits_{+\infty} f=+\infty$. **V** ☐ **F** ☐

G) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$. **V** ☐ **F** ☐

H) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x\times f(x))=0$. **V** ☐ **F** ☐

On pose $f(x)=P(x)\,\mathrm{e}^{2x-1}$, où P désigne un polynome de degré 2.

Alors :

I) La dérivée de f peut s'écrire $f'(x)=Q(x)\,\mathrm{e}^{2x-1}$, avec Q un autre polynome, et ce polynome Q est de degré 2 aussi. **V** ☐ **F** ☐

J) Quel que soit le polynome P de degré 2, on a $\lim\limits_{-\infty} f=0$. **V** ☐ **F** ☐

K) L'équation $f(x)=-3$ ne peut pas avoir de solution, vu qu'une exponentielle est toujours positive. **V** ☐ **F** ☐

L) On suppose que $f'(x)=(1+x^2)\,\mathrm{e}^{2x-1}$.

Si P a pour expression $P(x)=ax^2+bx+c$, alors a,b,c vérifient : $\begin{cases} a=1\\ 2a+b=0\\ b+c=1\end{cases}$. **V** ☐ **F** ☐

On pose $f_1(x)=\mathrm{e}^{3x}$. Soit un réel $\lambda>0$ on pose $f_2(x)=-\lambda^2\mathrm{e}^{x}+2\lambda\mathrm{e}^{2x}$.On appelle C_1 et C_2 les courbes respectives de ces deux fonctions.

Alors :

M) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x f_2(x)}{f_1(x)}=2\lambda.$ **V** ☐ **F** ☐

N) C_1 et C_2 se coupent au point $A(\ln(\lambda);3\lambda)$. **V** ☐ **F** ☐

O) C_1 est au-dessus de C_2 (au sens large) et ce pour toute valeur de λ. **V** ☐ **F** ☐

P) Il existe un point $B\in C_1\cap C_2$ en lequel C_1 et C_2 ont la même tangente. **V** ☐ **F** ☐

Soit f définie dans $[0;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{x}{x+1}\mathrm{e}^{-1/x}$ si $x>0$ et $f(0)=0$.

Alors :

Q) f est continue en 0. **V** ☐ **F** ☐

R) f n'est pas dérivable en 0. **V** ☐ **F** ☐

S) C_f ne possède pas d'asymptote en $+\infty$. **V** ☐ **F** ☐

T) Pour tout $x\geqslant 0$ on a $f(x)\leqslant 1$. **V** ☐ **F** ☐

Soit $a\in\mathbb{R}$, et soit A le point de coordonnées $A(a;\mathrm{e}^a)$. On pose $u(x)=\mathrm{e}^x$ et C le graphe de u. Soit T_a la tangente à C au point A. Enfin, soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\mathrm{e}^x-e^a(x+1-a)$.

Alors :

U) Une équation de T_a est $y=\mathrm{e}^a(x+1-a)$. **V** ☐ **F** ☐

V) f' est croissante sur $\mathbb{R}$. **V** ☐ **F** ☐

W) C est en-dessous de T_a à gauche de A et au-dessus de T_a à droite de A. **V** ☐ **F** ☐

X) Pour toute valeur fixée de x_0, il existe un a tel que la tangente à C au point d'abscisse a, soit parallèle la tangente à C_f au point d'abscisse x_0. **V** ☐ **F** ☐

6 Questions ++

A) Soit E l'ensemble des fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ et vérifiant « il existe a, $b\in\mathbb{R}$ tels que pour tout x réels, $f'(x)=a\mathrm{e}^x+b$ ». Soit f une fonction de E. Alors :

a	$a=1$ et $b=0$
b	pour tous a et b réels, pour tout x réel, on a : $\dfrac{f'(x)-b}{a}=\mathrm{e}^x$
c	$\lim\limits_{+\infty}f=+\infty$
d	la tangente en 0 à la courbe représentative de f a pour coefficient directeur $a+b$

B) Soit f une fonction dérivable vérifiant pour tous a, $b\in\mathbb{R}$: $f(a+b)=f(a)f(b)$. Alors :

a	$f(0)=1$
b	pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)\geqslant 0$
c	pour tout a, $x\in\mathbb{R}$, $f'(a+x)=f'(a)f'(x)$
d	pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=\mathrm{e}^x$

C) Soit $a\in\mathbb{R}^*$. Soit M_a (respectivement N_a) le point d'abscisse a de la courbe de $f(x)=\mathrm{e}^x$ (respectivement la courbe $g(x)=\mathrm{e}^{-x}$). Soit I_a le milieu du segment $[M_aN_a]$. Soit Δ la droite horizontale passant par I_a. Soit K_a (respectivement L_a) l'intersection de Δ avec la courbe de $f(x)=\mathrm{e}^x$ (respectivement la courbe de $g(x)=\mathrm{e}^{-x}$). Alors :

a	K_a et L_a ont la même abscisse
b	si x_{K_a} (respectivement x_{L_a}) désigne l'abscisse de K_a (respectivement de L_a), alors pour toute valeur de a on a $x_{K_a}>x_{L_a}$
c	y_{I_a} peut être dans $]-\infty;1[$
d	il existe deux valeurs distinctes de a pour lesquelles I_a est le milieu de $[K_aL_a]$

D) Soit k un réel et soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que la fonction g définie par $g(x)=f(x)-\mathrm{e}^x$ est positive dans l'intervalle $]-\infty;k]$ et nulle en k.
Alors :

a	f admet en $-\infty$ une limite, finie ou infinie, qui est strictement positive
b	forcément $\lim\limits_{x\to-\infty} f=0$
c	$f(x)=1+\mathrm{e}^x$ convient.
d	si $g'=g$ alors $g=0$

E) Soit la fonction $h(x)=\mathrm{e}^{-x^2}$, soit P le point de son graphe d'abscisse $x\in\mathbb{R}$, soit $M_x(x;0)$, soit Q_x (respectivement N_x) le symétrique de P_x (respectivement de M_x) par rapport à l'axe des ordonnées, soit $A(x)$ l'aire du rectangle $M_xP_xQ_xN_x$. Alors :

a	l'aire maximale atteinte $A(x)$ vaut $\sqrt{\dfrac{2}{\mathrm{e}}}$
b	la relation : $A(x)=\lvert h'(x)\rvert$ est fausse
c	la quantité $A(x)$ est maximale pour $x=0$
d	$\lim\limits_{x\to+\infty} A(x)=+\infty$

7 QCM alternatifs (de 0 à 4 réponses justes)

A) Soit f une fonction dérivable vérifiant pour tous a, $b\in\mathbb{R}$: $f(a+b)=f(a)f(b)$, alors :

α	β	γ	δ
$f(0)=1$	pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)\geqslant 0$	pour tous a, $x\in\mathbb{R}$: $f'(a+x)=f'(a)f'(x)$	pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=\mathrm{e}^x$

B) Soit f une fonction dont la dérivée seconde est toujours positive. Alors cette fonction peut être :

α	β	γ	δ
$f(x)=\mathrm{e}^x$	$f(x)=\mathrm{e}^{-x}$	$f(x)=\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^x}$	$f(x)=\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{-x}}$

C) Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, croissante, de limites 0 en $-\infty$ et 1 en $+\infty$. Alors cette fonction peut être :

α	β	γ	δ
$f(x)=\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^x}$	$f(x)=-\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^x}$	$f(x)=1-\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}$	$f(x)=\dfrac{2x^2+3\mathrm{e}^x}{x^2+\mathrm{e}^x}-2$

D) On pose $O(0;\,0)$ et $A(0;\,1)$. Soient $f(x)=x\mathrm{e}^{-x}$ et a un réel tels que la tangente T_a à C_f à l'abscisse a coupe le segment $[OA]$. Alors a peut être égal à :

α	β	γ	δ
0	2	-2	$7\sqrt{5}$

8 Familles, algos et récurrences

On revient ici au principe « une seule réponse juste ».

A) Pour $n\in\mathbb{Z}$ on pose $f_n(x)=(x-1)\mathrm{e}^{x-n}$.
Alors :

a	il n'y a aucun point $A(a,b)$ fixé par lequel passeraient tous les graphes C_{f_n}
b	le nombre $f_n'(0)$ tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$
c	toutes les f_n sont décroissantes dans $]-\infty;0[$
d	toutes les C_{f_n} admettent une tangente horizontale en $a=1$

B) Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $f_n(x) = (x-n)e^{-x}$.
Alors :

a	pour certaines valeurs de n, f_n est croissante sur $\mathbb{R}$
b	soit $k \in \mathbb{R}$; soit $n \in \mathbb{N}$; si $f_n(k) = 0$, alors f_n admet un extremum en $k+1$
c	pour certaines valeurs de n, on a $f_n''(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
d	la suite $(f_{n+1}(1) - f_n(1))$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$

C) On considère l'algorithme suivant :

Algorithme 5.1

I. $x \leftarrow 0$; $p \leftarrow 0,01$; $y \leftarrow 1$

II. `tant que` $x < 10$:

III. `dessiner le point de coordonnées` (x, y)

IV. ****

Pour que cet algorithme donne une approximation de la courbe de $f(x) = e^{2x}$ par la méthode d'Euler, il faut écrire ligne IV :

a	IV. $y \leftarrow x + p$
b	IV. $y \leftarrow y + 2x$ `et` $x \leftarrow x + p$
c	IV. $y \leftarrow y + 2p$ `et` $x \leftarrow x + p$
d	IV. $y \leftarrow y \times (1 + 2p)$ `et` $x \leftarrow x + p$

D) On a le tableur suivant : `A1=1,1` puis `A2=A1*A$1` puis `B1=1` puis `B2=(sqrt(B1)+1)^2`.
L'instruction `sqrt` désigne la racine carrée, l'opérateur `*` le produit, et l'opérateur `^2` le carré.
On sélectionne $A2$ et $B2$ et on les recopie vers le bas. Alors :

a	pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $Bn > An$
b	pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $Bn < An$
c	il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que $An = Bn$
d	$\lim\limits_{n \to +\infty} (Bn - An) = -\infty$

9 Réflexion autour d'un thème mathématique

Thème 1 : la **convexité**.

A) Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et telle que pour tout x réel $f''(x) > 0$. Alors :

a	b	c	d
$f(10) > f(-10)$	$f'(10) > f'(-10)$	$f''(10) > f''(-10)$	aucne des trois

B) Soient f, g, h, trois fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et telles que $f' = g$ et $g' = h$.
On suppose que g est croissante.
Soit u la fonction définie par $u(x) = f(x) - f(0) - f'(0)x$.
Alors :

a	h est croissante
b	f est croissante
c	la fonction u ne prend que des valeurs positives
d	la fonction u change de signe en 0

C) Soit a un réel. Alors la fonction t définie par $t(x) = e^x - e^a - e^a(x-a)$:

a	admet en $x = a$ un minimum
b	est croissante sur $\mathbb{R}$
c	vérifie que pour tout x dans $\mathbb{R}$: $t'(x) = t(x)$
d	est l'équation de la tangente en a à la courbe de la fonction exponentielle

Thème 2 : les **limites**.

D) Soit f la fonction définie dans $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ par $f(x)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$, et g,h définies par :

$$g(x)=\frac{1}{f(x)},\ h(x)=(f(x))^2.$$

Alors :

a	C_f possède une asymptote verticale d'équation $x=\frac{1}{\mathrm{e}}$
b	C_f possède une asymptote horizontale d'équation $y=0$
c	C_g ne possède aucune asymptote verticale
d	C_h possède les mêmes asymptotes verticales et horizontales que C_f

E) Soit f une fonction. On définit (là où c'est possible) les trois fonctions g,h,k par :

$$g(x)=\frac{1}{f(x)},\ h(x)=(f(x))^2,\ k(x)=\mathrm{e}^{f(x)}.$$

Alors :

a	à chaque asymptote verticale de C_f correspond une asymptote horizontale de C_g et vice-versa
b	C_h et C_f ont exactement les mêmes asymptotes
c	$\lim\limits_{+\infty} h=+\infty$ implique automatiquement : soit $\lim\limits_{+\infty} f=+\infty$, soit $\lim\limits_{+\infty} f=-\infty$
d	C_f peut avoir une asymptote verticale en $x=a$ sans que C_k ne possède d'asymptote verticale en $x=a$

F) Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et telle que :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty,\quad \lim_{\substack{x\to0\\x<0}} f(x)=-\infty,\quad \lim_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)=+\infty,\quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty.$$

On définit g et k par $g(x)=f(\mathrm{e}^x)$ et $k(x)=\mathrm{e}^{f(x)}$.

On considère les dix assertions suivantes, certaines sont justes, d'autres sont fausses ou pas forcément vraies :

(1)	$\lim\limits_{x\to-\infty} g(-x)=+\infty$	(2)	$\lim\limits_{x\to-\infty} k(-x)=+\infty$
(3)	$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} k(-x)=0$	(4)	$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$
(5)	$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} g(x)=0$	(6)	$\lim\limits_{x\to+\infty} g(-x)=+\infty$
(7)	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(k(x))=+\infty$	(8)	$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} k(x)=0$
(9)	$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} k(x)=0$	(10)	$\lim\limits_{x\to+\infty} k(x)=-\infty$

Parmi ces assertions, celles qui sont vraies sont au nombre de :

a	b	c	d
2	4	6	8

G) Soit $f(x)=(2+\sin(x))\mathrm{e}^{-x}$.

Alors :

a	pour tout réel $s>0$, on a pour tout $x\in\mathbb{R}$: $-s<f(x)<s$
b	pour tout réel $s>0$, il y a un x_0 tel que, pour tout $x>x_0$, $f(x)>s$
c	pour tout réel $s>0$ et pour tout $x_0\in\mathbb{R}$ on a $x>x_0 \Leftrightarrow f(x)<s$
d	pour tout réel $s>0$, il y a un intervalle $[a;+\infty[$ dans lequel $0<f(x)<s$

10 Rédactions d'élèves imaginaires...

A) Pascal écrit : « *On pose* $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$ *si* $x \neq 0$ *et* $f(0) = 0$. *On veut savoir si* f *est continue en* 0.

α) *Si on prouve que* $\lim\limits_{0} f = 0$, *vu que* $f(0) = 0$,
on aura montré que f *est continue en* 0 — **V** ☐ **F** ☐

β) *Je sais que la limite de* $\dfrac{-1}{x^2}$, *lorsque* x *tend vers* 0 *est* $-\infty$. — **V** ☐ **F** ☐

γ) *Je sais que si* a *tend vers* $-\infty$ *alors* e^a *tend vers* 0. — **V** ☐ **F** ☐

δ) *J'en conclus que* $\lim\limits_{0} f = 0$ *d'où le résultat.* » — **V** ☐ **F** ☐

B) Quentin écrit : « *Je veux dériver la fonction* $f(x) = \mathrm{e}^{-\ln x}$:

α) *J'applique* $(\mathrm{e}^{ax})' = a\mathrm{e}^{ax}$ *avec* $a = -\ln$ *donc*
$f'(x) = -\ln \mathrm{e}^{-\ln x} = -(-\ln x) = \ln x$ — **V** ☐ **F** ☐

β) *J'aurais pu aussi simplifier d'abord* $f(x) = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\ln x}} = \dfrac{1}{x}$. — **V** ☐ **F** ☐

γ) *Dans ce cas j'applique* $\left(\dfrac{1}{x^n}\right)' = \dfrac{1}{nx^{n-1}}$ *et donc* $f'(x) = \dfrac{1}{1} = 1$. — **V** ☐ **F** ☐

δ) *Si je veux calculer* $f'(1)$ *je calcule d'abord* $f(1) = \mathrm{e}^{-\ln 1} = \mathrm{e}^0 = 1$,
puis je dérive : $f'(1)$ *égale zéro comme dérivée d'une constante.* » — **V** ☐ **F** ☐

C) Raoul écrit : « *Je veux trouver l'équation de la tangente* T *en* $a = 1$ *à la courbe de la fonction* $f(x) = x\mathrm{e}^{-x}$:

α) *Je vais calculer la dérivée de la courbe en* $a = 1$. — **V** ☐ **F** ☐

β) *Pour cela j'écrit* $f'(x) = (1-x)\mathrm{e}^{-x}$ *et je remplace :* $f'(1) = 0$. — **V** ☐ **F** ☐

γ) *La tangente est alors* $T = f'(1)(x-1)$. — **V** ☐ **F** ☐

δ) *Je trouve une tangente horizontale :*
la fonction f *a donc un sommet en* $a = 1$. » — **V** ☐ **F** ☐

D) Sysiphe écrit : « *Je veux connaître les variations de* $f(x) = (3-x)\mathrm{e}^x$:

α) *J'ai* $f'(x) = (2-x)\mathrm{e}^x$. — **V** ☐ **F** ☐

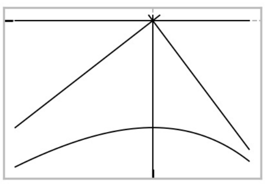
β) $f'(2) = 0$ *alors* f' *a un extremum en* $x = 3$. — **V** ☐ **F** ☐

γ) *Ici* $f'(x)$ *s'annule en* $x = 2$ *et est du signe de* $(x-2)$,
donc f *croît jusqu'à l'abscisse* 2 *puis décroît.* — **V** ☐ **F** ☐

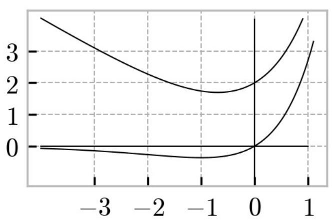
δ) *Chaque réel* $y < \mathrm{e}^2$ *a donc deux antécédents par* f. » — **V** ☐ **F** ☐

11 Exercices avec graphiques

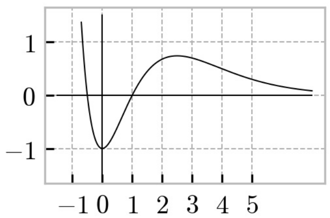
A) On considère la figure suivante, qui présente deux droites ainsi que la courbe de $f(x) = x - \mathrm{e}^x$:

	**a**	la courbe admet deux asymptotes obliques, l'une en $-\infty$, l'autre en $+\infty$
	b	la fonction f est paire
	c	la tangente en a a pour équation : $y = x(1-\mathrm{e}^a) + \mathrm{e}^a(a-1)$
	d	il y a deux valeurs de a, l'une négative, l'autre positive, pour lesquelles cette tangente passe par $O(0;0)$

B) On considère la figure suivante, représentant les courbes des deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2\mathrm{e}^x - x$ et $h(x) = x\mathrm{e}^x$:

	**a**	C_2 est la courbe de h et C_1 la courbe de g
	b	les deux fonctions g et h ont un extremum en une même abscisse a comprise entre -1 et 0
	c	les deux courbes ne se croisent jamais
	d	si $u(x)=h(x)-g(x)$ alors $u''(x)=-x\mathrm{e}^x$, $u'(x)$ est toujours négatif, donc u décroissante sur $\mathbb{R}$

C) Voici le graphe d'une fonction f définie par $f(x)=(ax^2+bx+c)\mathrm{e}^{-x}$:

	**a**	$a=4$, $b=-1$ et $c=-1$
	b	$a+b+c=1$
	c	$a=-1$, $b=2$ et $c=-1$
	d	$a=2$, $b=-1$ et $c=-1$

Chapitre 6
Corrigés - Exponentielle

1 Révisions immédiates du cours

A) **Réponse a** : $\boxed{e^{-x}}$
En effet, on a la relation : $e^a e^b = e^{a+b}$.

B) **Réponse c** : $\boxed{e^{x^2+2x-1}}$
D'après la relation $\dfrac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$.

C) **Réponse a** : $\boxed{-e^{-x}}$
a est juste et b est fausse, car e^{-x} toujours strictement positif.
c est fausse, car $(-e^{-x})^2 = e^{-2x}$ est toujours strictement positif puisque c'est une exponentielle.
d est fausse, car $e - e^x$ est nul en $x = 1$, négatif après, et positif avant.

D) **Réponse c** : $\boxed{\text{la fonction } x \mapsto e^{f(x)} \text{ a les mêmes sens variations que } f}$
a est fausse, car $e^{f(x)}$ n'est pas toujours du même signe que $f(x)$, car $e^{f(x)}$ est toujours strictement positive, alors que $f(x)$ peut avoir n'importe quel signe.
b est fausse, car la fonction $x \mapsto e^{f(x)}$ n'est pas obligatoirement croissante. En effet par exemple, $x \mapsto e^{-x}$ n'est pas croissante.
c est juste. On peut le voir de deux manières :

- si g est croissante, pour toute fonction f, alors f et $g \circ f$ ont les mêmes variations. En effet, par croissance de g : $f(x) \leqslant f(y) \Leftrightarrow g(f(x)) \leqslant g(f(y))$;
- la dérivée de $x \mapsto e^{f(x)}$ est $x \mapsto f'(x) \times e^{f(x)}$, toujours du signe de $f'(x)$ car $e^{f(x)} > 0$.

E) **Réponse d** : $\boxed{\text{la fonction } u(x) = e^{-e^x}}$
a est fausse, car la fonction $u(x) = e^x + e^{-x}$ tend vers $+\infty$, par somme (par somme de $+\infty$ et de 0).
b est fausse, car la fonction $u(x) = e^x \times e^{-x}$ est constante égale à 1.
c est fausse, car $\dfrac{e^x}{e^{-x}} = e^{2x}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{2x} = +\infty$.
d est juste, car lorsque que x tend vers $+\infty$, $-e^x$ tend vers $-\infty$, or, $\lim\limits_{y \to -\infty} e^y = 0$.

F) **Réponse c** : $\boxed{f'(x) = \dfrac{x(2-x)}{e^x}}$
La dérivée de $f(x) = \underbrace{x^2}_{u}\underbrace{e^{-x}}_{v}$ est $f'(x) = \underbrace{2x}_{u'}\underbrace{e^{-x}}_{v} + \underbrace{x^2}_{u}\underbrace{(-e^{-x})}_{v'} = (2x - x^2)e^{-x} = \dfrac{x(2-x)}{e^x}$.

G) **Réponse d** : $\boxed{\text{aucune des trois}}$
$f(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow e^{-\frac{x}{2}-1} \leqslant 1 \Leftrightarrow -\dfrac{x}{2} - 1 \leqslant 0 \Leftrightarrow -1 \leqslant \dfrac{x}{2} \Leftrightarrow x \geqslant -2$.

2 Premières applications

A) **Réponse b** : $\boxed{\text{admet l'ensemble vide comme solution}}$
La relation $e^{\sqrt{-1-x^2}} \geqslant 0$ est vraie partout où elle est définie. (On a même, pour tout x où cela est défini, $e^{\sqrt{-1-x^2}} > 0$). Le problème est que ce n'est pas beaucoup défini. En effet, il faut pour cela que $-1 - x^2 \geqslant 0$ afin qu'on puisse prendre sa racine carrée. Or, c'est le contraire qui est vrai puisque pour tout x réel, $-1 - x^2 \leqslant -1 < 0$. L'ensemble des x vérifiant cette relation est donc vide.

B) **Réponse d** : $\boxed{\mathrm{e}^{1+x}+\mathrm{e}^{1+x}}$

a est fausse, car $(\mathrm{e}^{1+x})^2=\mathrm{e}^{2(1+x)}$.

b est juste. En effet, $\dfrac{\mathrm{e}^{1+x^2}}{\mathrm{e}^{-2x}}=\mathrm{e}^{1+x^2+2x}=\mathrm{e}^{(1+x)^2}$ (identité remarquable).

c est fausse, par exemple pour $x=0$, on a $\mathrm{e}^{2^{1+x}}=\mathrm{e}^{2^{1+0}}=\mathrm{e}^{2^1}=\mathrm{e}^2$ alors que $\mathrm{e}^{(1+x)^2}=\mathrm{e}^{(1+0)}=\mathrm{e}^{1^2}\mathrm{e}^1=\mathrm{e}$.

d est fausse aussi, car cela est égal à $2\mathrm{e}^{1+x}$.

C) **Réponse d** : $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(-\mathrm{e}^{-x})=0}$

a est fausse, car $\lim\limits_{x\to-\infty} f(\mathrm{e}^x)=0=\lim\limits_{y\to 0} f(y)$ et l'on ne peut affirmer là-dessus, l'énoncé ne donnant aucune information sur la limite de f en 0.

b est fausse, car $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{f(x)}=\lim\limits_{y\to 0}\mathrm{e}^y=1$.

c est fausse, car $\lim\limits_{x\to-\infty} f(-\mathrm{e}^x)=\lim\limits_{y\to 0} f(y)$ comme au a.

d est juste, car $\lim\limits_{x\to-\infty} f(-\mathrm{e}^{-x})=\lim\limits_{y\to+\infty} f(-y)=\lim\limits_{z\to-\infty} f(z)=0$.

D) **Réponse c** : $\boxed{\dfrac{x-1}{x}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}$

La dérivée de $g(x)=\underbrace{x}_{u}\underbrace{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}_{v}$ est $g'(x)=\underbrace{1}_{u'}\underbrace{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}_{v}+\underbrace{x}_{u}\underbrace{\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}_{v'}=\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=\dfrac{x-1}{x}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.

E) **Réponse b** : $\boxed{f \text{ est croissante sur } \mathbb{R}}$

a est fausse, car $f'(x)=\dfrac{2}{x^3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$.

b est fausse, car f est décroissante sur $]-\infty;0[$.

c est juste, car lorsque x tend vers 0, $-\dfrac{1}{x^2}$ tend vers $-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$.

d est fausse, car pour tout $x\neq 0$, on a $\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{1}{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}\neq \mathrm{e}^{-x^2}$.

F) **Réponse a** : $\boxed{f(x)=\dfrac{3\mathrm{e}^{-x}+x}{x^2\mathrm{e}^{-x}}}$

a correspond à la fonction dont la limite en $+\infty$ n'est pas égale à 3. En effet, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}(3\mathrm{e}^{-x}+x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2\mathrm{e}^{-x})=0^+$ donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

b correspond à une fonction de limite 3 lorsque x tend vers $+\infty$ car :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4\mathrm{e}^{-x}+3x^2}{x^2+\mathrm{e}^{-x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2\left(\overbrace{\dfrac{4\mathrm{e}^{-x}}{3x^2}}^{\text{tend vers } 0}+1\right)}{x^2\left(1+\underbrace{\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x^2}}_{\text{tend vers } 0}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{x^2}=3.$$

c correspond aussi à une fonction de limite 3 lorsque x tend vers $+\infty$ car :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{2x}+x^2}{\mathrm{e}^x\left(\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{\mathrm{e}^x}{3}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{2x}\left(1+\dfrac{x^2}{\mathrm{e}^{2x}}\right)}{\mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^x\left(\dfrac{x^2}{2\mathrm{e}^x+\dfrac{1}{3}}\right)\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{2x}\left(1+\overbrace{\dfrac{x^2}{\mathrm{e}^{2x}}}^{\text{tend vers } 0}\right)}{\mathrm{e}^{2x}\left(\underbrace{\dfrac{x^2}{2\mathrm{e}^x}}_{\text{tend vers } 0}+\dfrac{1}{3}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{2x}\left(\dfrac{1}{3}\right)}=3.$$

et c correspond aussi à une fonction de limite 3 lorsque x tend vers $+\infty$ car :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+3\mathrm{e}^{-x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3\mathrm{e}^x\left(1+\dfrac{\overbrace{\mathrm{e}^{-2x}}^{\text{tend vers } 0}}{3}\right)}{\mathrm{e}^x\left(1+\underbrace{3\mathrm{e}^{-2x}}_{\text{tend vers } 0}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}=3.$$

G) **Réponse d** : $\boxed{u(x)=\dfrac{1-2\mathrm{e}^x}{-2\mathrm{e}^x-4}}$

a est fausse : on ne peut pas simplifier par -2.

b est fausse : ceci a pour limite $-\dfrac{1}{4}$ en $+\infty$ alors que u a pour limite 1 en $+\infty$.

c est fausse : on ne peut pas simplifier par les exponentielles.

d est juste, car on peut écrire $u(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^{-x}-2)}{\mathrm{e}^x(-2-4\mathrm{e}^{-x})}=\dfrac{1-2\mathrm{e}^x}{-2\mathrm{e}^x-4}$.

H) **Réponse b** : $\boxed{F(x)=-2\mathrm{e}^{-0,5x}-x-3}$

F peut avoir pour expression $F(x)=-2\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}-x+k$, avec $k\in\mathbb{R}$.

Remarque : se souvenir que la primitive de $x\mapsto \mathrm{e}^{ax}$ est $x\mapsto \dfrac{1}{a}\mathrm{e}^{ax}$.

3 Questions de logique

A) **Réponse c** : $\boxed{\text{il est possible que } f(x)>1 \text{ pour tout } x>0}$

a est fausse, car on ne peut pas dire si $f\left(\dfrac{1}{2}\right)>0$.

b est fausse, car $\mathrm{e}\approx 2,718$ donc $\mathrm{e}>2$ donc $\dfrac{\mathrm{e}}{2}>1$ donc $f\left(\dfrac{\mathrm{e}}{2}\right)>0$.

c est juste, car avoir $f(x)>1$ pour tout $x>0$ est effectivement compatible avec les hypothèses.

d est fausse : effectivement, si $\varepsilon>0$ alors $f(1+\varepsilon)>0$, toutefois, la réciproque n'est pas forcément vraie. Il suffit de prendre $f(x)=1+x^2$ et $\varepsilon=-1$.

B) **Réponse c** : $\boxed{\text{il est possible que } \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{\mathrm{e}^{-x}}=-\infty}$

a est fausse, car on n'a pas forcément $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^x}{f(x)}=+\infty$. En effet, si l'on prend $f(x)=\cos x$, alors on a $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{\mathrm{e}^x}=0$ par les gendarmes, mais $\dfrac{\mathrm{e}^x}{f(x)}$ n'a pas de limite lorsque x tend vers $+\infty$.

b est fausse, car, dans ce cas, $\dfrac{f(x)}{\mathrm{e}^x}=99\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}+\dfrac{1}{99}$ tend vers $\dfrac{1}{99}\neq 0$, lorsque x tend vers $+\infty$.

c est juste, car il est effectivement possible que $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{\mathrm{e}^{-x}}=-\infty$. Il suffit de prendre $f(x)=C^{\text{ste}}=-1$.
En fait tout est possible en $-\infty$, puisqu'aucune hypothèse n'est faite de ce côté.

d est fausse : rien ne peut être imposé en $-\infty$. Reprendre le contre exemple du **c**.

4 Questions en tableau

A) **Réponse a** : $\boxed{C_1}$
On pose $f(x)=\mathrm{e}^{x+1}$, alors $f(0)=\mathrm{e}\approx 2,718$ donc les réponses b et c sont éliminées.
La réponse d est exclue car la fonction f est à valeurs positives.

B) **Réponse a** : $\boxed{a=2 \text{ et } b=-3}$
Cette courbe représente $f(x)=a\mathrm{e}^x+bx$ et la tangente en 0 est tracée.
Déjà, $f(0)=2\Leftrightarrow a=2$ d'où $f(x)=2\mathrm{e}^x+bx$, ensuite la tangente a pour coefficient directeur -1 donc $f'(0)=-1$. Or, $f'(x)=2\mathrm{e}^x+b$, on a donc $2+b=-1\Leftrightarrow b=-3$.

C) **Réponse c** : $\boxed{f(x)=-x\,\mathrm{e}^{-x} \text{ et } f(x)=g'(x)}$
a est impossible, car f ne s'annule jamais, et g s'annule en 0 et en 1.
b est impossible, car alors f aurait pour courbe C_4, serait croissante sur $[0,1]$ et aurait donc une dérivée g de courbe C_3 qui devrait être positive sur $[0,1]$.
b est impossible, car alors f aurait pour courbe C_3, or $f'(x)$ s'annule en -1 et C_3 semble plutôt changer de variations en $+1$.
c est plausible : f aurait pour courbe C_3, les variations que l'on peut calculer pour f semblent correspondre aux mouvements de la courbe C_3. De plus, on a dans ce cas $f'(x)\leqslant 0$ sur $]-\infty;0]$ et $f'(x)\geqslant 0$ sur $[0;+\infty[$ ce que la courbe C_4, qui serait alors celle de $g=f'$, semble corroborer.

D) **Réponse a**
On sait que $\lim\limits_{+\infty} f = 0$ et $\lim\limits_{-\infty} f = +\infty$, ce qui élimine les réponses c et d.
On peut aussi calculer $f(-1) \approx 2\mathrm{e}$. Comme on sait que $\mathrm{e} \approx 2,7$, on a donc $f(-1) \approx 5,4$ (sans calculatrice).
Cela élimine encore une fois les réponses c et d, et rend peu plausible la réponse b.
On peut élaborer le tableau de signes de f, c'est celui de $x^2 - x$, donc :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Cela élimine la courbe b.
Par élimination c'est donc le graphe **a**. Si l'on veut, on peut encore vérifier :
$f'(x) = (3x - 1 - x^2)\mathrm{e}^{-x}$ est du signe de $3x - 1 - x^2$, qui s'annule en deux réels strictement positifs : $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$. Or, une seule courbe, la **a**, présente deux extréma strictement à droite du repère.

E) **Réponse c**
La fonction $g(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$ est paire ce qui elimine le graphe b (qui est le graphe de $x \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$).
Lorsque $x \to 0$, $-\dfrac{1}{x^2} \to -\infty$ donc $\lim\limits_{0} g = 0$ et quand $x \to \pm\infty$, $-\dfrac{1}{x^2} \to 0$ donc $\lim\limits_{\pm\infty} g = 1$.
Donc, c'est le graphe **c**.
Confirmation : g a pour dérivée $g'(x) = \dfrac{2}{x^3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$ négatif à gauche et 0 et positif à droite. Ainsi g décroît dans $]-\infty; 0]$ et croît dans $]0; +\infty[$.

Remarque :
- le graphe d serait celui de $x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ (courbe en cloche de Gauss, utilisée pour la loi normale en probabilités) ;
- le graphe a pourrait être celui de $x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$.

F) **Réponse d** :
La fonction $h(x) = x\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$ a pour limites : $\lim\limits_{x\to 0} -\dfrac{1}{x^2} = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} = 0$ d'où $\lim\limits_{x\to 0} h = 0$. Ceci ne permet pas d'exclure un graphe.
Le signe de $h(x)$ est celui de x, donc on a $h(x) < 0$ dans $]-\infty; 0[$ et $h(x) > 0$ dans $]0; +\infty[$, donc la réponse a est fausse.
On remarque que h est impaire, donc a et b sont fausses.
$h'(x) = \left(1 + x \times \dfrac{2}{x^3}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} = \left(1 + \dfrac{2}{x^2}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$ est toujours positif, donc h est croissante : c'est donc la réponse **d**.

Remarque : la courbe de h paraît plate autour de 0, ce n'est qu'une apparence, cela est caractéristique de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$.

5 Questions Vrai/Faux

A)

	F

$f'(x) = -2x\mathrm{e}^{-x^2}$ est positif à gauche de zéro et négatif à droite, donc c'est faux.

B)

	F

$f''(x) = (-2 - 2x \times (-2x))\mathrm{e}^{-x^2} = 4\left(x^2 - \dfrac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-x^2}$ donc f' décroît dans $\left]-\dfrac{\sqrt{2}}{2}; \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right[$.

C)

V	

$\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{-2x\mathrm{e}^{-x^2}}{\mathrm{e}^{-x^2}} = -2x$ est bien décroissante sur $\mathbb{R}$.

D)

	F

$\dfrac{f'(x)}{x} + \dfrac{f(x)}{2} = \dfrac{-2x\mathrm{e}^{-x^2}}{x} + \dfrac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2} = \mathrm{e}^{-x^2}\left(-2 + \dfrac{1}{2}\right) \neq 0.$

Remarque : il aurait fallu écrire : $\dfrac{f'(x)}{x} + 2f(x)$.

E) | V | |

$\lim\limits_{-\infty} f = 0$ par le théorème des gendarmes, car pour tout x réel, $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$.

F) | | F |

C'est faux : f n'a pas de limite en $+\infty$ car e^x tend vers $+\infty$ tandis que $\sin x$ change constamment de signe.

Une réponse plus technique consisterait à dire que, pour tout entier n, on a $f(n\pi) = 0$ et cela contredit la définition d'une limite infinie en $+\infty$.

Plus précisément :

- $f(n\pi) = 0$;
- $f\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = e^{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$, de limite $+\infty$ lorsque $n \to +\infty$;
- $f\left(-\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = -e^{-\frac{\pi}{2}+2n\pi}$, de limite $-\infty$ lorsque $n \to +\infty$;

donc, lorsque $x \to +\infty$, la fonction f n'a tout simplement pas de limite.

G) | | F |

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \left(\frac{\sin x}{x} e^x\right)$, or on sait que $\lim\limits_{x\to0} \left(\frac{\sin x}{x}\right) = 1$ (c'est une limite connue).
D'autre part, $\lim\limits_{x\to0} (e^x) = 1$. Ainsi, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{f(x)}{x} = 1$.

H) | V | |

On sait que $\lim\limits_{x\to-\infty} x\,e^x = 0$, c'est une limite connue. Vu que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$, par le théorème des gendarmes, on a tout de suite $\lim\limits_{x\to-\infty} (x \times f(x)) = 0$.

I) | V | |

En effet, $f(x)$ est de la forme $u(x) \times v(x)$ et donc :

$$f(x) = P'(x)e^{2x-1} + 2P(x)e^{2x-1} = (P'(x) + 2P(x))e^{2x-1}.$$

J) | V | |

En effet, si $P(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ on a $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x) \times e^{2x+1} = \lim\limits_{x\to-\infty} a\,x^2 \times e^{2x+1}$, or on peut écrire $a\,x^2 \times e^{2x+1} = a\,e \times (x\,e^x)^2$ et l'on sait que $\lim\limits_{x\to-\infty} (x\,e^x) = 0$ d'où le résultat.

K) | | F |

C'est faux car $P(x)$, lui, peut prendre des valeurs négatives.

L) | | F |

On a $f'(x) = 2(ax^2 + bx + c)\,e^{2x-1} + (2a\,x + b)\,e^{2x-1} = (2a\,x^2 + 2(a+b)\,x + (2c+b))\,e^{2x-1}$ et donc, en identifiant :

$$\begin{cases} 2a = 1 \\ 2(a+b) = 0 \\ 2c + b = 1 \end{cases}.$$

Le système proposé par l'énoncé serait obtenu si l'on oubliait le facteur 2 dans la dérivée de $x \mapsto e^{2x-1}$.

M) | V | |

$\frac{e^x f_2(x)}{f_1(x)} = \frac{e^x\,(-\lambda^2 e^x + 2\lambda e^{2x})}{e^{3x}}$ qui a la même limite lorsque $x \to +\infty$ que $\frac{2\lambda\,e^{3x}}{e^{3x}}$, soit 2λ.

N) | | F |

Dans l'esprit « qcm », on peut se contenter de vérifier si $f_1(\ln\lambda) = f_2(\ln\lambda) = 3\lambda$: pour f_1 cela donne $f_1(\ln\lambda) = e^{3\ln\lambda} = \lambda^3$ et pour f_2 cela donnerait $f_2(\ln\lambda) = -\lambda^2 e^{\ln\lambda} + 2\lambda e^{2\ln\lambda} = -\lambda^3 + 2\lambda \times \lambda^2 = \lambda^3$, donc $f_1(\ln\lambda) = f_2(\ln\lambda)$ certes mais le 3λ proposé par l'énoncé est faux.

On peut tenter le calcul pour aller plus loin que la question. Il s'agit de résoudre $-\lambda^2 e^x + 2\lambda e^{2x} = e^{3x}$, ce qui se simplifie en divisant à gauche et à droite par e^x d'où : $-\lambda^2 + 2\lambda e^x = e^{2x}$, on pose $X = e^x$ et l'équation s'écrit alors $\lambda^2 - 2\lambda X + X^2 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - X)^2 = 0$, on trouve $X = \lambda$ soit $x = \ln\lambda$: le point $(\ln\lambda; \lambda^3)$ donc le seul point d'intersection entre les deux courbes.

O) | V | |

Il s'agit de vérifier si on a bien $f_1(x) \geqslant f_2(x)$ pour toute valeur de x et de λ. Résolvons donc :

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{3x} \geqslant -\lambda^2\mathrm{e}^x + 2\lambda\mathrm{e}^{2x} &\Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{2x} \geqslant 0 \text{ on va poser } X = \mathrm{e}^x \\ &\Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda X + X^2 \geqslant 0 \\ &\Leftrightarrow (\lambda - X)^2 \geqslant 0, \end{aligned}$$

c'est donc vrai, C_1 est au-dessus de C_2 (elles se touchent en $x = \lambda$).

P) | V | |

Ce point ne pourrait être que le point $(\ln\lambda; \lambda^3)$ vu précédemment. A-ton $f_1'(\ln\lambda) = f_2'(\ln\lambda)$?
Oui, car $f_1'(\ln\lambda) = 3\mathrm{e}^{3\ln\lambda} = 3\lambda^3$ et $f_2'(\ln\lambda) = -\lambda^2\mathrm{e}^{\ln\lambda} + 4\lambda\mathrm{e}^{2\ln\lambda} = 3\lambda^3$.

Q) | V | |

En effet, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{x+1} = 0$ (par quotient) et $\lim\limits_{x\to 0} \mathrm{e}^{-1/x} = 0$ (par composée), donc (par produit) on peut affirmer que : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$.

R) | | F |

En effet, $\dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \dfrac{1}{x+1}\mathrm{e}^{-1/x}$ qui a une limite lorsque $x \to 0$. On trouve $f'(0) = 0$.

S) | | F |

En effet, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x+1} = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-1/x} = 1$ (par composée), donc (par produit) on peut affirmer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$: C_f possède donc une asymptote horizontale $y = 1$ au voisinage de $+\infty$.

T) | V | |

En effet, pour tout $x \geqslant 0$ on a $0 \leqslant \dfrac{x}{x+1} \leqslant 1$ on a aussi $-\dfrac{1}{x} \leqslant 0 \Rightarrow 0 < \mathrm{e}^{-1/x} \leqslant 1$, donc (par produit) on peut affirmer que pour tout $x \geqslant 0$ on a $f(x) \leqslant 1$.

U) | V | |

On a $u(x) = u'(x) = \mathrm{e}^x$ donc T_a: $y = \mathrm{e}^a(x - a) + \mathrm{e}^a$.

V) | V | |

$f'(x) = \mathrm{e}^x - e^a$ donc oui, f' est croissante sur $\mathbb{R}$.

W) | | F |

L'écart entre C et T_a se mesure par la fonction f. Ainsi, « C au-dessus de T_a » $\Leftrightarrow$ $f(x) \geqslant 0$.
Or, f' est croissante et $f'(a) = 0$ d'où, en remarquant que $f(a) = 0$, les variations de f :

x	$-\infty$		a		$+\infty$
f'		$\nearrow$	0	$\nearrow$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	0	$\nearrow$	
$f(x)$			$+$		

Ainsi, C est partout au-dessus de ses tangentes. Cette propriété s'appelle la *convexité*.

X) | V | |

L'énoncé signifie : « Pour tout réel x_0, il existe un réel a tel que $u'(a) = f'(x_0)$. »
Autrement dit : « Pour tout réel x_0, il existe un réel a tel que $\mathrm{e}^a = \mathrm{e}^{x_0} - e^a$. »
L'équation en a équivaut à $\mathrm{e}^a = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{x_0}$; elle admet toujours une (unique) solution.

6 Questions ++

A) **Réponse d** : $\boxed{\text{la tangente en 0 à la courbe représentative de } f \text{ a pour coefficient directeur } a+b}$

a est fausse, car justement, on ne sait pas : certes, $f \in E$ implique qu'il existe a et b tels que $f'(x) = a\mathrm{e}^x + b$, mais sans autre condition sur f on ne peut évidemment pas donner la valeur de a et de b.
b est fausse aussi, car déjà a peut être nul auquel cas la fraction n'est pas définie, ensuite, l'égalité est vraie pour une certaine valeur de a et une certaine valeur de b et non pas pour toute valeur de a et b : cela n'aurait pas de sens.
c est fausse, car on a pour tout x réel : $f(x) = a\mathrm{e}^x + bx + c$, avec c un certain réel fixé qui dépend de f. Ainsi : $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$ si $a > 0$ et $\lim\limits_{+\infty} f = -\infty$ si $a < 0$, et si $a = 0$ il y a encore d'autres possibilités suivant la valeur de b. Sans plus d'informations, on ne peut donc pas présumer de la limite de f en $+\infty$.
d est juste car la tangente en 0 à la courbe représentative de f a pour coefficient directeur :

$$f'(0) = a\mathrm{e}^0 + b = a + b.$$

B) **Réponse** b : $\boxed{\text{pour tout } x\in\mathbb{R},\ f(x)\geqslant 0}$
a est fausse, car en prenant $a=0$ et $b=0$ on a $f(0)=f(0)^2$ donc $f(0)=1$ ou 0. Ensuite, pour tout a réel, en prenant $b=0$, on a $f(a)=f(a)f(0)$, donc :

- soit $f(a)=0$ pour tout $a\in\mathbb{R}$ (f est dans ce cas la fonction nulle, et la propriété est effectivement vérifiée) ;
- soit il y a au moins un a tel que $f(a)\neq 0$ et dans ce cas on peut simplifier par $f(a)$ et l'on a alors $f(0)=1$.

On ne peut donc pas conclure quant à la valeur de $f(0)$.
b est juste. En effet, soit $x\in\mathbb{R}$, posons $a=b=\dfrac{x}{2}$ alors $f(x)=f(a)^2$ et ceci est donc positif puisque c'est un carré.
c est fausse, car pour tous $a,x\in\mathbb{R}$, on a : $f(a+x)=f(a)f(x)$, et si l'on dérive par rapport à x, on obtient $f'(a+x)=f(a)f'(x)$. Il y a donc un $'$ en trop dans l'égalité proposée.

Remarque : un candidat pourrait raisonner ainsi : « La fonction exponentielle $f(x)=\mathrm{e}^x$ est la solution de cette équation fonctionnelle $f(a+b)=f(a)f(b)$, et vu qu'alors $f=f'$ le c est vrai ». Ce raisonnement est faux, car imprécis. En effet, les fonctions $f(x)=\mathrm{e}^{ax}$, $a\in\mathbb{R}$ autrement dit, les fonctions $f(x)=m^x$, $m>0$, sont solutions, aussi, de cette équation fonctionnelle. Et elles, elles ne vérifient pas $f=f'$.

d est fausse, voir réponse précédente.

C) **Réponse** b : $\boxed{\begin{array}{c}\text{si } x_{K_a} \text{ (respectivement } x_{L_a}\text{) désigne l'abscisse de } K_a\\ \text{(respectivement de } L_a\text{), alors pour toute valeur de } a \text{ on a } x_{K_a}-x_{L_a}\geqslant 0\end{array}}$
Question demandant un peu de recherche.

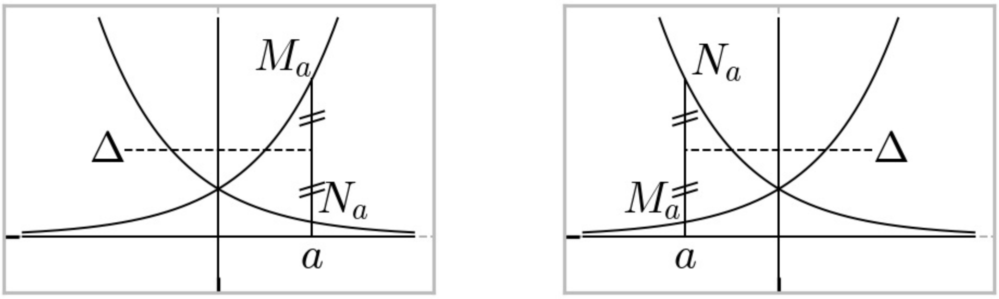


Figure 6.1. à gauche, $a>0$ et, à droite, $a<0$.

Un petit calcul : $I_a\left(a;\dfrac{\mathrm{e}^a+\mathrm{e}^{-a}}{2}\right)$.
Déjà, ce qui est important, c'est que pour toute valeur non nulle de a, on a $\dfrac{\mathrm{e}^a+\mathrm{e}^{-a}}{2}>1$.
C'est la proposition c (qui est donc fausse) qui nous met la puce à l'oreille pour chercher cela.
Explication :

- soit on le sait par culture générale (c'est le cosinus hyperbolique $\dfrac{\mathrm{e}^a+\mathrm{e}^{-a}}{2}=\mathrm{ch}\,a$) ;
- soit on remarque, en dérivant, que le tableau de variations de $x\mapsto\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$ est :

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
$\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$	$\searrow$ 1 $\nearrow$

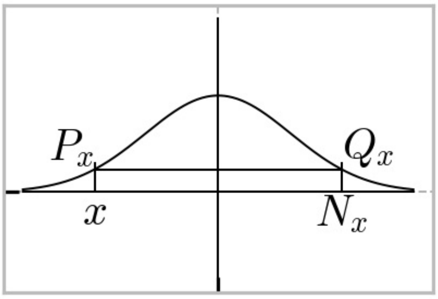
avec un minimum absolu égal à 1.

Par conséquent, K_a et L_a ont une ordonnée strictement supérieure à 1, et donc $x_{K_a}>x_{L_a}$, c'est donc la réponse **b**. Regardons les autres réponses :
a est fausse, car K_a et L_a ont la même ordonnée, mais pas la même abscisse (sauf pour $a=0$).
c est fausse, car $y_{I_a}>1$.
d est fausse, ce n'est vrai que pour $a=0$ (une seule valeur donc).

D) **Réponse d** : $\boxed{\text{si } g' = g \text{ alors } g = 0}$

a est fausse, car f n'a pas forcément de limite en $-\infty$. Prenons par exemple $f(x) = 2 + \sin(x)$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x) \geqslant 1$ donc, vu que pour tout $x \leqslant 0$, $\mathrm{e}^x \leqslant 1$, on a bien, pour tout $x \leqslant 0$, $f(x) - \mathrm{e}^x \geqslant 0$: les hypothèses sont vérifiées.
Mais f n'admet par de limite en $-\infty$.
b est fausse, il suffit de prendre le contre exemple précédent ou de prendre $f(x) = x^2$ et $I =]-\infty; -1]$.
c est fausse, car dans ce cas $g(x) = C^{\text{ste}} = 1$ ne peut donc s'annuler en aucun $k \in \mathbb{R}$.
d est juste, car $g' = g$ implique (pour tout x réel) $g(x) = \lambda \mathrm{e}^x$ avec un certain $\lambda \in \mathbb{R}$.
Vu qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $g(k) = 0$ on a alors $\lambda = 0$ (car une exponentielle ne s'annule jamais) d'où $g = 0$.

E) **Réponse a** : $\boxed{\text{l'aire maximale atteinte } A(x) \text{ vaut } \sqrt{\frac{2}{\mathrm{e}}}}$



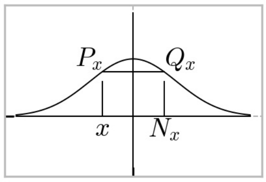


Figure 6.2.

L'aire vaut $A(x) = M_xN_x \times M_xP_x = 2|x| \times \mathrm{e}^{-x^2}$.
Pour $x \geqslant 0$ on a $A'(x) = 2x(-2x)\mathrm{e}^{-x^2} + 2\mathrm{e}^{-x^2} = 4\left(\frac{1}{2} - x^2\right)\mathrm{e}^{-x^2}$.
Les variations de A en fonction de $x \geqslant 0$ sont donc :

x	0	$\sqrt{2}/2$	$+\infty$
$A'(x)$	$+$	0	$-$
A	$\nearrow$		$\searrow$

On a $A(0) = 0 = \lim\limits_{x \to +\infty} A(x)$ et le maximum vaut $A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} \times \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\mathrm{e}}}$.

a est donc juste, car l'aire maximale atteinte $A(x)$ vaut $\sqrt{\frac{2}{\mathrm{e}}}$.
b est fausse, car $h'(x) = -2x\,\mathrm{e}^{-x^2}$.
c est fausse, car la quantité $A(x)$ est minimale pour $x = 0$.
d est fausse, car $\lim\limits_{x \to +\infty} A(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (2x\mathrm{e}^{-x^2}) = 0$.

7 QCM alternatifs (de 0 à 4 réponses justes)

A) $\boldsymbol{\beta}$ est juste.
α est fausse : certes en prenant $a = b = 0$ on a $f(0) = f(0)^2$, mais cela implique $f(0) = 1$ ou $f(0) = 0$. Ce dernier cas, pour information, donne, avec $a = x$ et $b = 0$, la fonction nulle : $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
$\boldsymbol{\beta}$ est juste car pour tout réel x on a d'après la relation : $f(x) = \left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2$.
γ est fausse : prenons $b = x$, dérivons la relation $f(a + x) = f(a)f(x)$, on a : $f'(a + x) = f(a)f'(x)$. Il fallait donc marquer $f(a)$ et non pas $f'(a)$. Contre exemple : $a = 0$ et $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$.
δ est fausse : $f(x) = \mathrm{e}^{ax}$ convient aussi pour toute valeur de a.

B) $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\delta}$ sont justes.
$\boldsymbol{\alpha}$ est juste puisque si $f(x)=\mathrm{e}^x$ alors $f''(x)=f'(x)=f(x)=\mathrm{e}^x$.
$\boldsymbol{\beta}$ est juste car si $f(x)=\mathrm{e}^{-x}$ alors $f'(x)=-\mathrm{e}^{-x}$ donc $f''(x)=\mathrm{e}^{-x}$.
γ est fausse car si $f(x)=\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^x}$ alors $f'(x)=-\mathrm{e}^x\times\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^x}=-\mathrm{e}^{x-\mathrm{e}^x}$ et
$f''(x)=-(x-\mathrm{e}^x)'\mathrm{e}^{x-\mathrm{e}^x}=-(1-\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^{x-\mathrm{e}^x}=(\mathrm{e}^x-1)\mathrm{e}^{x-\mathrm{e}^x}$ et ceci est négatif pour $x<0$.
$\boldsymbol{\delta}$ est juste car si $f(x)=\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{-x}}$ alors $f'(x)=-\mathrm{e}^{-x}\times\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{-x}}=-\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{-x}-x}$ et
$f''(x)=-(\mathrm{e}^{-x}-x)'\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{-x}-x}=-(-\mathrm{e}^{-x}-1)\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{-x}-x}=(\mathrm{e}^{-x}+1)\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{-x}-x}$, toujours positif.

C) γ est juste.
Déjà, les quatre fonctions sont effectivement définies sur $\mathbb{R}$.
α est fausse, car la fonction $x\mapsto\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^x}$ a les mêmes variations que $x\mapsto-\mathrm{e}^x$ donc décroissante.
β est fausse, car $\lim\limits_{x\to-\infty}(-\mathrm{e}^x)=0$ donc, par composition, $\lim\limits_{x\to-\infty}(-\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^x})=-1$.
γ est juste, car la fonction $x\mapsto 1+\mathrm{e}^x$ est croissante et à valeurs strictement positives donc son inverse $x\mapsto\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}$ est décroissante donc f est croissante. De plus, $\lim\limits_{x\to-\infty}(1+\mathrm{e}^x)=1$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=1-1=0$ et, de même, $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\mathrm{e}^x)=+\infty$ donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}=0$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$.
δ est fausse mais c'est plus long à voir.
Tout est bon du côté des limites, car :

- $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2+3\mathrm{e}^x}{x^2+\mathrm{e}^x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2}{x^2}=2$ donc, par soustraction, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$;
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2+3\mathrm{e}^x}{x^2+\mathrm{e}^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}=3$ donc, par soustraction, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$.

La monotonie est longue à voir si l'on veut dériver. Une astuce sauve la situation. Elle consiste à remarquer que le haut de la fraction est presque égal à 3 fois le bas :
dans $]0;+\infty[$, $\dfrac{2x^2+3\mathrm{e}^x}{x^2+\mathrm{e}^x}<\dfrac{3x^2+3\mathrm{e}^x}{x^2+\mathrm{e}^x}=3$. Par conséquent, on a, dans $]0;+\infty[$, $f(x)<3-2=1$.
Vu que $f(0)=1$, f ne peut être croissante dans $]0;+\infty[$.

D) $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\delta}$ sont justes.
On a $f(x)=x\,\mathrm{e}^{-x}$, donc $f'(x)=(1-x)\,\mathrm{e}^{-x}$, et ainsi :

$$T_a\colon y=(1-a)\,\mathrm{e}^{-a}(x-a)+a\,\mathrm{e}^{-a}.$$

L'énoncé stipule que pour $x=0$, $y\in[0,1]$, or pour $x=0$ nous avons :

$$\begin{aligned} y &= (1-a)\,\mathrm{e}^{-a}(0-a)+a\,\mathrm{e}^{-a}\\ &= -(a-a^2)\,\mathrm{e}^{-a}+a\,\mathrm{e}^{-a}\\ &= a^2\,\mathrm{e}^{-a}. \end{aligned}$$

Posons $u(x)=a^2\,\mathrm{e}^{-x}$. Alors $u'(x)=(2a-a^2)\mathrm{e}^{-x}$ donc les variations de u sont les suivantes :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
u		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

avec $u(0)=0$ et $u(2)=\dfrac{4}{\mathrm{e}^2}$, or $\dfrac{4}{\mathrm{e}^2}<1$ car $4<\mathrm{e}^2$ ce qui découle de $2<\mathrm{e}$.
Ainsi pour toute valeur de $a\in[0;+\infty[$, on a bien $a^2\,\mathrm{e}^{-a}\in[0,1]$ comme attendu, d'où $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\delta}$ justes.
Quand à γ, il faut vérifier à la main : $u(-2)=4\mathrm{e}^2$ clairement supérieur à 1.

8 Familles, algo et récurrences

A) **Réponse c** : $\boxed{\text{toutes les } f_n \text{ sont décroissantes dans }]-\infty;0[}$
a est fausse. En effet, cela saute aux yeux que pour tout $n\in\mathbb{Z}$, $f_n(1)=0\mathrm{e}^{-n}=0$. Ainsi, toutes les C_{f_n} passent par $A(1,0)$.
b est fausse, car $f_n'(x)=(x-1)\mathrm{e}^{x-n}+\mathrm{e}^{x-n}=x\mathrm{e}^{x-n}$ donc $f_n'(0)=0\mathrm{e}^{0-n}=0$.
c est juste, car $f_n'(x)=x\mathrm{e}^{x-n}$, et ceci est du signe de x puisque l'exponentielle est toujours positive. Ceci est donc bien négatif dans $]-\infty;0[$.
d est complètement fausse, car $f_n'(1)=1\mathrm{e}^{1-n}=\dfrac{1}{\mathrm{e}^n}$, et donc aucune C_{f_n} n'admet de tangente horizontale en $a=1$.

B) **Réponse b** : $\boxed{\text{soit } k\in\mathbb{R}\text{; soit } n\in\mathbb{N}\text{; si } f_n(k)=0\text{, alors } f_n \text{ admet un extremum en } k+1}$

a est fausse, car $f_n'(x)=(-x+n+1)\mathrm{e}^{-x}$. Pour que cela soit positif sur $\mathbb{R}$, il faut et il suffit que pour tout $x\in\mathbb{R}$ on ait $-x+n+1\geqslant 0 \Leftrightarrow -x+n+1\geqslant 0$. Or, quelque soit le choix de n, ceci ne peut évidemment être vrai pour tout x dans $\mathbb{R}$.
b est juste. Supposons que $f_n(k)=0$, cela signifie que $(k-n)\mathrm{e}^{-k}=0$ et vu qu'une exponentielle ne s'annule jamais, cela équivaut à $k=n$. Il nous faut donc vérifier si oui ou non $f_n'(n+1)=0$. Or, $f_n'(n+1)=(-n-1+n+1)\mathrm{e}^{-x}=0$.
c est fausse, car $f''(x)=(x-n-1)\mathrm{e}^{-x}+(-1)\mathrm{e}^{-x}=(x-n-2)\mathrm{e}^{-x}$, il est impossible que cela soit positif pour tout x dans $\mathbb{R}$. C'est le même principe que pour la proposition a.
d est fausse, car $f_{n+1}(1)-f_n(1)=(1-n-1)\mathrm{e}^{-1}-(1-1)\mathrm{e}^{-1}=-\dfrac{n}{\mathrm{e}}$, qui tend vers $-\infty$ lorsque $n\longrightarrow+\infty$.

C) **Réponse d** : $\boxed{\text{IV. } y\leftarrow y\times(1+2p) \texttt{ et } x\leftarrow x+p}$

La fonction $f(x)=\mathrm{e}^{2x}$ vérifie $f'(x)=2\mathrm{e}^{2x}=2f(x)$. Ici, $f(x)$ est représentée par y. Entre x et $x+p$ on assimile la courbe $y=f(x)$ à sa tangente qui a pour pente $f'(x)=2f(x)=2y$. On passe donc du point (x,y) au point $(x+p, y+2yp)$.
a est fausse, car x ne varierait pas.
b est fausse, car ceci construit la courbe de $x\mapsto x^2$.
c est fausse, car ceci construit la droite d'équation $y=2x+1$.

D) **Réponse d** : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}(B_n-A_n)=-\infty}$

Analysons la situation :
Dans la colonne A, on a la suite $a_n=1,1^n$.
Dans la colonne B, on a la relation de récurrence absconse $B_{n+1}=(1+\sqrt{B_n})^2$.
On calcule les premiers termes pour voir et l'on trouve $1,4,9,16$. On se demande alors si $B_n=n^2$ pour tout n. On montre aisément par récurrence que c'est vrai.
Remarque : on aurait pu prendre la racine de chaque côté et écrire $\begin{cases}\sqrt{B_1}=1\\ \sqrt{B_{n+1}}=1+\sqrt{B_n}\end{cases}$, donc $(\sqrt{B_n})$ est une suite arithmétique de raison 1, d'où $\sqrt{B_n}=n$ pour tout $n\geqslant 1$, soit $B_n=n^2$.

Derrière la formule apparemment compliquée de B_2 se cachait en fait une récurrence élémentaire ! Il s'agit donc maintenant de comparer les deux suites $A_n=1,1^n$ et $B_n=n^2$.
On sait que, si $n\longrightarrow+\infty$, a_n finit par dépasser b_n. Plus précisément, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{\alpha n}}{n^2}=+\infty$ pour tout $\alpha>0$ (à savoir). Ici, la formule $1,1^n=\mathrm{e}^{n\ln 1,1}$ nous fournit $\alpha=\ln 1,1$.
Remarque : pour la culture générale il est bon de savoir que $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{\alpha n}}{n^k}=+\infty$ pour tous $\alpha,k>0$.
Etudions maintenant les réponses proposées :
a est fausse, car $\lim\limits_{n\to+\infty}(A_n-B_n)=+\infty$.
b est fausse, car par exemple, $B_2>A_2$ car $B_2=4$ et $A_2=1,21$.
c est fausse : en effet, vu que $1,1=1+0,1$, chaque A_n a une décimale de plus que son prédécesseur A_{n-1}. Or, B_n est toujours un nombre entier.

9 Réflexion autour d'un thème mathématique

Thème 1 : la **convexité**.

A) **Réponse b** : $\boxed{f'(10)>f'(-10)}$
En effet, f'' étant la dérivée de f', l'énoncé nous indique que f' est strictement croissante.
Le a et le c sont évidemment faux, prendre $f(x)=\mathrm{e}^{-x}$ ou $f(x)=x^2$.

B) **Réponse c** : $\boxed{\text{la fonction } u \text{ ne prend que des valeurs positives}}$
a est fausse : h est positive (en tant que dérivée d'une fonction croissante), mais pas forcément croissante ; contre exemple $h(x)=\mathrm{e}^{-x}$.
b est fausse : prendre $f(x)=x^2$
c est juste et d est fausse car $u'(x)=f'(x)-f'(0)=g(x)-g(0)$ donc u' est croissante avec $u'(0)=0$ donc :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$u'(x)$		$-$	0	$+$	
u		$\searrow$	0	$\nearrow$	

C) **Réponse a** : $\boxed{\text{admet en } x=a \text{ un minimum}}$
En effet, $t'(x)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^a$ donc $t'(a)=0$ et t' négatif avant a et positif après.
d est fausse car une équation de tangente est une fonction affine.

$\boxed{\text{Thème 2 : les \textbf{limites}.}}$

D) **Réponse d** : $\boxed{C_h \text{ possède les mêmes asymptotes verticales et horizontales que } C_f}$
a est fausse : la valeur interdite de f étant 0, si C_f possède une asymptote verticale c'est forcément en 0.
b est fausse car $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\mathrm{e}^0=1$.
c est fausse car $g(x)=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ et $\lim\limits_{x\to0^+} g(x)=+\infty$ donc C_g possède l'asymptote verticale $x=0$.
d est juste car h possède en $+\infty, -\infty, 0^-, 0^+$, les mêmes limites que f.

E) **Réponse d** : $\boxed{\begin{array}{c} C_f \text{ peut avoir une asymptote verticale en } x=a \\ \text{sans que } C_k \text{ ne possède d'asymptote verticale en } x=a \end{array}}$
a est fausse : prendre $f(x)=\mathrm{e}^x$.
b est fausse : prendre $f(x)=C^{\text{ste}}=2$.
c est fausse : soit $s(x)$ qui vaut 1 là où $\sin x\geqslant 0$ et -1 là où $\sin x<0$ et soit $f(x)=x\times s(x)$ alors $h(x)=x^2$ de limite $+\infty$ en $+\infty$ mais f n'a pas de limite en $+\infty$.
d est juste : prendre $f(x)=\ln x$ et $a=0$ (alors $k(x)=x$ et C_k n'a pas d'asymptote verticale).

F) **Réponse c** : $\boxed{6}$
(1) est <u>vraie</u> car $g(-x)=f(\mathrm{e}^{-x})$ et lorsque $x\to-\infty$, on a $\mathrm{e}^{-x}\to+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.
(2) est <u>vraie</u> car $k(-x)=\mathrm{e}^{f(-x)}$ et losque $x\to-\infty$, $f(-x)\to+\infty$ donc $\mathrm{e}^{f(-x)}\to+\infty$ aussi.
(3) est <u>vraie</u> car lorsque $x\to0^+$, $f(-x)\to-\infty$ donc $\mathrm{e}^{f(-x)}\to0$.
(4) est fausse car lorsque $x\to-\infty$, $\mathrm{e}^x\to0^+$ donc $f(\mathrm{e}^x)\to+\infty$.
(5) peut être vraie ou fausse mais n'est pas *forcément vraie* car lorsque $x\to0^-$, $\mathrm{e}^x\to1$ et l'on a aucune information sur $\lim\limits_{x\to1} f(x)$.
(6) est <u>vraie</u> car lorsque $x\to+\infty$, $\mathrm{e}^{-x}\to0^+$ donc $f(\mathrm{e}^{-x})\to+\infty$.
(7) est <u>vraie</u> car $f(k(x))=f(\mathrm{e}^{f(x)})$ et lorsque $x\to-\infty$, $f(x)\to-\infty$ donc $\mathrm{e}^{f(x)}\to0^+$ donc $f(\mathrm{e}^{f(x)})\to+\infty$.
(8) est <u>vraie</u> car lorsque $x\to0^-$, $f(x)\to-\infty$ donc $\mathrm{e}^{f(x)}\to0$.
(9) est fausse car lorsque $x\to0^+$, $f(x)\to+\infty$ donc $\mathrm{e}^{f(x)}\to+\infty$.
(10) est fausse car une exponentielle est toujours positive.
Donc 6 réponses justes.

G) **Réponse d** : $\boxed{\text{pour tout réel } s>0, \text{ il y a un intervalle } [a;+\infty[\text{ dans lequel } 0<f(x)<s}$
f tend vers 0 en $+\infty$ par le principe des gendarmes. Donc l'assertion **d**, qui n'est autre que la définition de $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$, est vraie.
a est fausse : par exemple $f(0)$ n'est pas compris entre $-0,1$ et $0,1$.
b est fausse : ce serait la définition de $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$
c n'a aucun sens, elle signifierait que tous les $f(x)$ sont inférieurs à n'importe quel $s>0$ donné, ce qui n'est vrai que pour la fonction nulle ou une fonction à valeurs négatives.

10 Rédactions d'élèves imaginaires...

A) Réponses :

α)

V	

C'est la définition de la continuité.

β)

V	

γ)

V	

δ)

V	

Bravo Pascal !

B) Réponses :

α) $\boxed{}\boxed{\textbf{F}}$

Absurde, car « ln » n'est pas une constante comme le « 1a » de $ax+b$, mais une fonction.

β) $\boxed{\textbf{V}}\boxed{}$

γ) $\boxed{}\boxed{\textbf{F}}$

Faux, $\left(\dfrac{1}{x^n}\right)' = \dfrac{-n}{x^{n+1}}$ et en particulier $\left(\dfrac{1}{x^n}\right)' = \dfrac{-1}{x^2}$. Quentin a imaginé que la dérivée de $\dfrac{1}{u}$ était $\dfrac{1}{u'}$, ce qui est faux.

δ) $\boxed{}\boxed{\textbf{F}}$

Erreur courante dans les copies : $f'(1)$ n'est pas la dérivée de la fonction constante égale à $f(1)$.

C) Réponses :

α) $\boxed{}\boxed{\textbf{F}}$

On ne dérive pas la courbe, mais la fonction que représente cette courbe.

β) $\boxed{\textbf{V}}\boxed{}$

γ) $\boxed{\textbf{V}}\boxed{}$

Erreur de formulation. Il aurait fallu dire : « La tangente T a alors pour équation... », cependant la formule est juste.

δ) $\boxed{\textbf{V}}\boxed{}$

Effectivement $f'(1)=0$ donc tangente horizontale en 1. Cependant cela n'implique pas automatiquement un extremum pour la fonction (= un sommet pour la courbe). Prendre pour s'en convaincre $f(x)=x^3$ en 0. En fait pour un sommet, il faut (et il suffit) aussi que la dérivée change de signe.

D) Réponses :

α) $\boxed{\textbf{V}}\boxed{}$

β) $\boxed{}\boxed{\textbf{F}}$

Faux, en effet, ce n'est pas f' mais f qui a un extremum en 2 (d'autre part, la conclusion est un peu hâtive, il faut préciser aussi que f' change de signe).

γ) $\boxed{\textbf{V}}\boxed{}$

δ) $\boxed{}\boxed{\textbf{F}}$

Faux, il faut voir aussi les limites. Si $y \leqslant 0$, alors y n'a qu'un antécédent par f.

11 Exercices avec graphiques

A) **Réponse c** : $\boxed{\text{la tangente en } a \text{ a pour équation : } y = x(1-\mathrm{e}^a)+\mathrm{e}^a(a-1)}$

a est fausse, car en $-\infty$ on a $f(x)-x=-\mathrm{e}^x$ qui tend effectivement vers 0 si $x\to-\infty$ mais en $+\infty$, on a beau chercher une asymptote oblique d'équation $y=ax+b$, on aura toujours $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(ax+b)] = \lim\limits_{x\to+\infty}[-\mathrm{e}^x+x-ax-b]=-\infty$. La courbe n'admet donc qu'une seule asymptote oblique, en $-\infty$.

b est fausse, ne serait-ce qu'à cause de la réponse précédente.

c est juste : $f'(x)=1-\mathrm{e}^x$ donc la tangente en a a pour équation :

$$y=(1-\mathrm{e}^a)(x-a)+(a-\mathrm{e}^a) \Leftrightarrow y=(1-\mathrm{e}^a)x+(a-1)\mathrm{e}^a.$$

d est fausse. Pour s'en convaincre, il faut résoudre en a l'équation $0=(1-\mathrm{e}^a)\times 0+(a-1)\mathrm{e}^a$. On trouve : $0=(a-1)\mathrm{e}^a \Leftrightarrow a=1$. La seule tangente à C_f passant par $O(0;0;0)$ est la tangente en $a=1$.

B) **Réponse d** : $\boxed{\begin{array}{c}\text{si } u(x)=h(x)-g(x) \text{ alors } u''(x)=-x\mathrm{e}^x,\\ u'(x) \text{ est toujours négatif, donc } u \text{ décroissante sur } \mathbb{R}\end{array}}$

a est fausse, car $h(0)=0$ donc C_1 est la courbe de h.

b est fausse, car $g'(x)=2\mathrm{e}^x-1$ est nul pour $2\mathrm{e}^x=1 \Leftrightarrow x=-\ln 2$. $h'(x)=(1+x)\mathrm{e}^x$ nul en $x=-1$.

Remarque : pour info, $-\ln 2$ est entre -1 et 0. Deux manières de le voir :

- $-\ln 2 \approx 0,69$ (résultat à connaître, cela peut servir) ;
- $-\ln \mathrm{e} < \ln 2 < \ln 1$ ce qui donne $-1 < -\ln 2 < 0$.

c est fausse : les deux courbes se croisent forcément puisqu'à partir de $x=2$, il est clair que $h(x)>g(x)$. Or, pour $x=0$ on a $h(x)<g(x)$. Le théorème des valeurs intermédiaires affirme donc que la fonction écart $u(x)=h(x)-g(x)$, qui est continue, puisqu'elle change de signe entre la valeur 0 et la veleur 2, doit s'annuler entre 0 et 2.
d est fausse : on a $u'(x)=h'(x)-g'(x)=(1+x)\mathrm{e}^x-(2\mathrm{e}^x-1)=-\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x+1$ et donc, en dérivant à nouveau : $u''(x)=-\mathrm{e}^x+(x+1)\mathrm{e}^x=x\mathrm{e}^x=h(x)$.
Ainsi, l'expression proposée par l'énoncé pour u'' est fausse. D'autre part, que ce soit la quantité $x\mathrm{e}^x$ ou $-x\mathrm{e}^x$, aucune des deux ne garde un signe constant sur $\mathbb{R}$.

C) **Réponse d** : $\boxed{a=2, b=-1 \text{ et } c=-1}$
Déjà $f(0)=-1 \Leftrightarrow c=-1$. Cela n'élimine malheureusement aucune des quatre propositions.
Ensuite, $f(1)=0 \Leftrightarrow (a+b+c)\mathrm{e}^{-1}=0 \Leftrightarrow a+b+c=0$, cela élimine b et nous donne $a+b=1$, ce qui elimine la réponse a.
Nous avons enfin le signe de f, qui est celui de ax^2+bx+x :

x	$-\infty$		$a\in[-1;0]$		1		$+\infty$
ax^2+bx+c		$+$	0	$-$	0	$+$	

Cela implique déjà que $a>0$, ce qui élimine c.
C'est donc la réponse d.
On peut vérifier que $ax^2+bx+c=0$ pour $x_1=\dfrac{1-\sqrt{9}}{4}=-\dfrac{1}{2}$ et $x_2=\dfrac{1+\sqrt{9}}{4}=1$.

Chapitre 7

Énoncés - Suites

1 Révisions immédiates du cours

(u_n) est **arithmétique** de raison r. On suppose que $u_0 = 10$ et $r = 5$.

Alors :

A) $u_1 =$

a	b	c	d
15	18	20	100

B) $u_n = 100 \Leftrightarrow n =$

a	b	c	d
15	18	20	100

(w_n) est **arithmétique** de raison r'. On suppose que $w_{12} = 24$ et $w_{50} = 40$.

C) $r' =$

a	b	c	d
2	$\frac{40}{24} - \frac{50}{12}$	$\frac{40}{50} - \frac{24}{12}$	$\frac{40-24}{50-12}$

(z_n) est **arithmétique** de raison r''. On suppose que $z_{12} = 50$ et $r'' = 2$.

D) $z_0 =$

a	b	c	d
0	50	-100	26

E) $z_n = 62 \Leftrightarrow n =$

a	b	c	d
15	18	20	100

(v_n) est **géométrique** de raison q. On suppose que $v_0 = 10$ et $q = 1,05$.

F) $v_{12} =$

a	b	c	d
$10 + 12 \times 1,05$	$10 \times 12 \times 1,05$	22	$10 \times 1,05^{12}$

G) $v_n = 100 \Leftrightarrow n =$

a	b	c	d
$\left(\frac{100}{10}\right)^{\frac{1}{10}}$	$\frac{\ln 1,05}{\ln 10}$	$1,05^{10}$	$\frac{\ln 10}{\ln 1,05}$

2 Premières applications

(v_n) est **géométrique** de raison $q > 0$.

A) Si $v_{12} = 24$ et $v_{14} = 48$, alors $q = \ldots$

a	b	c	d
2	$\sqrt{2}$	$\ln 2$	$\left(\frac{48}{24}\right)^{14-12}$

B) Si $v_{11} = 10$ et $v_{21} = 40$, alors $q = \ldots$

a	b	c	d
$\sqrt[4]{10}$	$\frac{30}{10}$	$4^{0,1}$	$\frac{40}{10} \times 10$

C) Si $v_{12} = 50$ et $q = 0,89$, alors $v_0 = \ldots$

a	b	c	d
$\dfrac{v_{12}}{q^{12}}$	$\dfrac{12}{50^{0,89}}$	$50 \times q^{-11}$	$\dfrac{50}{12} - 0,89$

D) Si $v_{12} = 50$ et $q = 0,89$, alors $v_{20} = \ldots$

a	b	c	d
$50 \times q^8$	$v_0 + 20\,q$	$v_0 \times q^{20-12}$	on ne peut pas savoir

On définit les deux suites (a_n) et (b_n) par $a_n = \dfrac{2+n}{3}$ et $b_n = \dfrac{\mathrm{e}^n}{2}$.

E) La suite (a_n) est :

a	arithmétique de raison 2
b	arithmétique de raison $\dfrac{1}{3}$
c	géométrique de raison 2
d	ni arithmétique, ni géométrique

F) La suite (b_n) est :

a	arithmétique de raison e
b	géométrique de raison $\dfrac{\mathrm{e}}{2}$
c	géométrique de raison e
d	ni arithmétique, ni géométrique

3 Questions de logique

Soient k et g deux nombres réels. Pour tout $n \geqslant 0$, on pose : $u_n = k \times g^n$.

A) Alors on peut affirmer que :

a	(u_n) croissante $\Rightarrow k > 0$
b	$k > 0 \Rightarrow (u_n)$ croissante
c	(u_n) converge vers 0 $\Leftrightarrow 0 \leqslant g < 1$
d	(u_n) diverge vers $+\infty \Leftrightarrow g^2 > 1$

Soit (u_n) une suite vérifiant : « pour tout $n \in \mathbb{N}$, il y a un rang $p \geqslant n$ tel que $|u_p - 1| < \dfrac{1}{p}$. »

B) On peut affirmer que :

a	(u_n) converge vers 1
b	(u_n) ne converge pas vers 1
c	la suite (ε_n) définie par $\varepsilon_n = u_n - \dfrac{1}{n}$ converge vers 0
d	on ne peut rien affirmer de tout cela

C) On peut affirmer que :

a	la suite (u_n) est bornée
b	la suite (u_n) n'est pas bornée
c	la suite (ε_n) définie par $\varepsilon_n = u_n - \dfrac{1}{n}$ est bornée
d	on ne peut rien affirmer de tout cela

D) Une suite (u_n) qui pourrait vérifier l'hypothèse de l'énoncé serait :

a	$u_n = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$
b	$u_n = n \times \cos\left(\dfrac{n\,\pi}{4}\right)$
c	$u_n = 1 - \dfrac{1}{n}$
d	$u_n = 2 - \dfrac{1}{n^2}$

4 Questions en tableaux

(u_n) est une suite arithmétique.

	u_n	raison	variations		il faut écrire dans la case vide...
A)	$u_0 > 0$	$r > 0$		**a**	$\nearrow$
				b	$\searrow$
				c	non monotone
				d	on ne peut pas conclure
B)	$u_0 < 0$		$\searrow$	**a**	$r > 0$
				b	$r < 0$
				c	$r = 1$
				d	on ne peut pas conclure
C)		$r > 0$	$\nearrow$	**a**	$u_0 > 0$
				b	$u_0 < 0$
				c	$u_0 = 1$
				d	on ne peut pas conclure

(v_n) est une suite géométrique.

	u_n	raison	variations		il faut écrire dans la case vide...
D)	$v_0 > 0$	$r > 0$		**a**	$\nearrow$
				b	$\searrow$
				c	non monotone
				d	on ne peut pas conclure
E)	$v_0 < 0$		$\searrow$	**a**	$r > 1$
				b	$0 < r < 1$
				c	$r < 1$
				d	on ne peut pas conclure
F)	$v_0 > 0$	$-1 < r < 0$		**a**	$\nearrow$
				b	$\searrow$
				c	non monotone
				d	on ne peut pas conclure

5 Questions Vrai/Faux

Soient $u_n = 2 + \frac{n}{2}$ et $v_n = 3 + \frac{n}{3}$.

Alors :

A) (u_n) et (v_n) sont toutes deux arithmétiques. **V** ☐ **F** ☐

B) $(v_n - u_n)$ diverge vers $+\infty$. **V** ☐ **F** ☐

C) $\left(\frac{v_n}{u_n}\right)$ a une limite finie. **V** ☐ **F** ☐

D) $(v_n - u_n)$ ne s'annule jamais. **V** ☐ **F** ☐

On pose $u_n = 2 \times 1,3^n$ et $\mathrm{vg}_n = 3 \times 1,2^n$.

Alors :

E) (u_n) et (v_n) sont toutes deux arithmétiques. **V** ☐ **F** ☐

F) $(v_n - u_n)$ diverge vers $+\infty$. **V** ☐ **F** ☐

G) $\left(\frac{v_n}{u_n}\right)$ a une limite finie. **V** ☐ **F** ☐

H) $(v_n - u_n)$ ne s'annule jamais. **V** ☐ **F** ☐

On pose $u_n = 2 + 0,9 \times n$ et $v_n = 3 \times 0,9^n$.

Alors :

I) (u_n) et (v_n) ont des sens de variations contraires (l'une croît, l'autre décroît). **V** ☐ **F** ☐

J) Pour tout $n \in \mathbb{R}$, on a $2 < u_n < v_n < 3$. **V** ☐ **F** ☐

K) La suite (v_n) est divergente. **V** ☐ **F** ☐

L) La suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ converge vers une limite finie ℓ. **V** ☐ **F** ☐

Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergeant vers un réel fini ℓ. Soit (w_n) une suite vérifiant pour tout $n \in \mathbb{R}$: $u_n \leqslant w_n \leqslant v_n$.

Alors :

M) Forcément (u_n) est croissante et (v_n) décroissante. **V** ☐ **F** ☐

N) (w_n) peut diverger vers $+\infty$. **V** ☐ **F** ☐

O) La suite $\left(\dfrac{1}{w_n}\right)$ a une limite finie. **V** ☐ **F** ☐

P) Si l'on suppose de plus que (u_n) et (v_n) sont croissantes, alors (w_n) est forcément croissante elle aussi. **V** ☐ **F** ☐

Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites vérifiant : $u_n \to 0$, $v_n \to 2$, et, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \leqslant w_n \leqslant v_n$.

Alors :

Q) (w_n) converge vers un réel c vérifiant $0 \leqslant c \leqslant 2$. **V** ☐ **F** ☐

R) $\begin{cases} v_n = 2 + \mathrm{e}^{-n} \\ w_n = 1 + \mathrm{e}^{-n}\cos(10n) \\ u_n = 0 \end{cases}$ vérifient les hypothèses. **V** ☐ **F** ☐

S) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leqslant w_n \leqslant 2$. **V** ☐ **F** ☐

T) Il existe un n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, on a $3 + w_n \geqslant v_n$. **V** ☐ **F** ☐

Soit (u_n) une suite qui converge vers un réel ℓ.

Alors :

U) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on peut écrire $\ell - \dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant \ell + \dfrac{1}{2}$. **V** ☐ **F** ☐

V) Il existe un rang à partir duquel $(u_n - \ell)^2 < \dfrac{1}{100}$. **V** ☐ **F** ☐

W) Pour tout intervalle $]\ell - \mu, \ell + \mu[$ il existe un rang $n \in \mathbb{N}$ tel que pour un certain $p > n$ on ait $u_p \in]\ell - \mu, \ell + \mu[$. **V** ☐ **F** ☐

X) La suite $k_n = \dfrac{1}{u_n - \ell}$ a une limite infinie. **V** ☐ **F** ☐

6 Questions ++

A) Soit (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 3u_n - 2 \end{cases}$. Soit (v_n) définie par $v_n = u_n - 1$. Alors :

a	à partir d'un certain rang, on a $u_n \leqslant 1$
b	$\lim (v_n) = -\infty$
c	pour tout $n \geqslant 0$, on a $v_n = 2^n$
d	pour tout $n \geqslant 0$, on a $u_n = 1 + 3^n$

B) Soit (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 3}{u_n - 1} \end{cases}$. Soit (v_n) définie par $v_n = \dfrac{u_n + 1}{u_n - 3}$. Alors :

a	$\lim (u_n) = +\infty$
b	$\lim (u_n) = 0$
c	$\lim (u_n) = -3$
d	aucune des trois

C) Soit (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{4u_n+3}{u_n+2} \end{cases}$. Soit (v_n) définie par $v_n = \dfrac{u_n+1}{u_n-3}$. Alors :

a	(v_n) est géométrique de raison 5
b	$u_n = \dfrac{1-3v_n}{v_n+1}$
c	$\lim u_n = +\infty$
d	aucune des trois

D) Soit (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 10 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 4 \end{cases}$.

Soit (v_n) définie par $v_n = u_n - 8$ et soit (S_n) définie par $S_n = u_0 + \cdots + u_n$.
Soit (w_n) une suite quelconque à termes positifs.
Alors :

a	si $(w_0 + \cdots + w_n)$ converge, alors (w_n) aussi
b	si $(w_0 + \cdots + w_n)$ diverge, alors (w_n) aussi
c	pour tout $n \geqslant 0$ on a $v_n = \dfrac{1}{2^n}$
d	pour tout $n \geqslant 0$ on a $S_n = 8n + 4 - \dfrac{1}{2^{n-1}}$

7 QCM alternatifs (de 0 à 4 réponses justes)

A) La définition de « (u_n) diverge vers $+\infty$ » est :

α	pour tout $k \in \mathbb{R}$ il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant q$ on a $u_n > K$
β	pour tout $k \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $p \geqslant n$ tel que $u_p > K$
γ	pour tout $k \in \mathbb{R}$ il y a un rang à partir duquel $u_n > K$
δ	pour tout $k \in \mathbb{R}$ pour tout $q \in \mathbb{N}$ il existe un $n \geqslant q$ tel que $u_n > K$

B) (u_n) est une suite croissante si et seulement si :

α	pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$
β	pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$
γ	pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 0$
δ	pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \geqslant 1$

C) La suite $u_n = n \times (-1)^n$:

α	est croissante
β	a une limite infinie
γ	on peut dire que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = n \times \cos(n)$
δ	on peut dire que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = n \times \cos(n\pi)$

8 Sommations, familles de fonctions, tableurs, récurrences, algos

On revient ici au principe « une seule réponse juste ».

A) Soit une suite (u_n) vérifiant pour tout entier : $u_{n+1} = a\, u_n$ où a est un nombre réel de signe inconnu. On appelle P_n la propriété « $u_n > 0$ ». Alors :

a	la propriété P_n est héréditaire
b	si P_n est vraie alors P_{n+2} est vraie
c	si $a > 0$ alors P_n est vraie pour tout n
d	si (u_n) est croissante alors P_n est vraie pour tout n

B) On définit les suites (u_n) et (v_n) par $u_n = 3 - \dfrac{n}{4}$ et $v_n = \dfrac{2}{1,5^n}$. Alors :

a	$u_{10} + u_{11} + \cdots + u_{100} = \dfrac{u_{10} + u_{100}}{2} \times 90$
b	$v_{20} + v_{21} + v_{22} = v_{20} \times \dfrac{1 - 1,5^3}{1 - 1,5}$
c	la suite (S_n) définie par $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ diverge vers $-\infty$
d	la suite (S'_n) définie par $S'_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$ diverge vers $+\infty$

C) On définit la suite (b_n) par $b_n = n + \dfrac{1 + (-1)^n}{2}$. Alors :

a	(b_n) est strictement croissante
b	(b_n) est constante
c	(b_n) est arithmétique
d	$b_0 + b_1 + \cdots + b_{99}$ est un nombre pair

D) Soit $A = \dfrac{1}{20 \times 21} + \dfrac{1}{21 \times 22} + \cdots + \dfrac{1}{29 \times 30}$. Alors :

a	$A = \displaystyle\sum_{i=20}^{30} \dfrac{1}{i \times (i+1)}$
b	$A = \displaystyle\sum_{i=21}^{30} \dfrac{1}{i \times (i-1)}$
c	la somme A comporte 9 termes
d	$A \geqslant 0,5$

E) On définit la suite (u_n) par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{1 + u_n}$. Dans un tableur, on tape `A1`=1. La formule à mettre en `A2` pour générer la suite en tirant vers le bas est :

a	`1/A1+1`
b	`1/(A1+n)`
c	`1/(A$1+1)`
d	`1/(A1+1)`

9 Réflexion autour de quelques thèmes mathématiques

Thème 1 : **les limites**.

A) Soit (u_n) strictement décroissante qui tend vers 0. Alors :

a	la suite $(\cos(u_n))$ est décroissante
b	la suite $\left(\dfrac{1}{1 + u_n}\right)$ croît vers $+\infty$
c	la suite $(-\ln u_n)$ croît vers $+\infty$
d	la suite $\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{u_n}}\right)$ croît vers $+\infty$

B) Soient deux suites (u_n) et (v_n) telles que $\lim (u_n - v_n) = 0$. Alors :

a	(u_n) et (v_n) convergent vers une limite commune
b	$\dfrac{u_n}{v_n}$ converge vers 1
c	$(u_n)^2 - (v_n)^2 \to 0$
d	aucune des trois

C) Soient deux suites (u_n) et (v_n) dont les valeurs absolues $|u_n|$ et $|v_n|$ convergent toutes les deux vers 1. Alors :

a	$(u_n)^2 - (v_n)^2 \to 0.$
b	(u_n) et (v_n) convergent chacune, soit vers 1 soit vers -1
c	$\lvert u_n - v_n \rvert \to 0.$
d	aucune des trois

D) Il est possible de construire :

a	une suite (u_n) croissante convergeant vers 0 avec $u_0 = 1$
b	une suite monotone qui n'a pas de limite, ni finie, ni infinie
c	une suite qui tend vers $+\infty$ mais qui n'est pas croissante
d	une suite stationnaire qui diverge

Thème 2 : **les suites bornées**.

E) On peut affirmer que :

a	toute suite bornée converge
b	il existe des suites majorées qui tendent vers $+\infty$
c	il existe des suites majorées qui tendent vers $-\infty$
d	toute suite qui a pour limite $+\infty$ est croissante

F) Si (u_n) est une suite bornée, alors :

a	la suite $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$ est bornée
b	la suite (e^{u_n}) est bornée
c	la suite (u_n) est convergente
d	la suite (u_n) est monotone

10 Rédactions d'élèves imaginaires...

A) Alphonse écrit : « *Soit* $\begin{cases} u_{n+1} = u_n^3 \\ u_0 = a \in \mathbb{R} \end{cases}$.

α) *vu que je peux écrire* $u_{n+1} = f(u_n)$,
avec $f(x) = x^3$ *strictement croissante dans* $\mathbb{R}$ — **V** ☐ **F** ☐

β) *alors je peux conclure que* (u_n) *croît* — **V** ☐ **F** ☐

γ) *et comme* $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$ — **V** ☐ **F** ☐

δ) *alors* (u_n) *diverge vers* $+\infty$. » — **V** ☐ **F** ☐

B) Baptiste écrit : « *Soit* $u_n = n - 22$. *Je peux alors écrire que :*

α) *pour tout* n, u_n *est croissante* — **V** ☐ **F** ☐

β) *d'autre part,* (u_n) *est arithmétique de raison* -22 ; — **V** ☐ **F** ☐

γ) *toute suite arithmétique de raison* r, *diverge vers* $-\infty$ — **V** ☐ **F** ☐

δ) *la suite* (u_n) *est bornée par* -22. » — **V** ☐ **F** ☐

C) Carla écrit : « *On suppose que pour tout* $n \in \mathbb{N}$: $u_n = v_n - \dfrac{1}{n}$. *Je peux alors écrire que :*

α) *si* $v_n \to +\infty$ *alors* $u_n \to +\infty$ — **V** ☐ **F** ☐

β) *si* $v_n \to -\infty$ *alors* $u_n \to -\infty$ — **V** ☐ **F** ☐

γ) *si* $u_n - v_n \to 0$, (u_n) *est une asymptote pour* (v_n) *en* $+\infty$ — **V** ☐ **F** ☐

δ) *la dérivée de* $(u_n - v_n)$ *est* $\dfrac{1}{n^2}$. » — **V** ☐ **F** ☐

D) Pascalito écrit : « *On suppose que pour tout* $n \in \mathbb{N}$: $u_n = -e^{-n}$. *Je peux alors écrire que :*

α) (u_n) *est croissante donc converge* — **V** ☐ **F** ☐

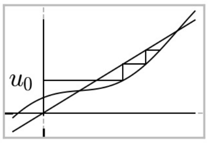
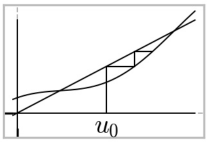
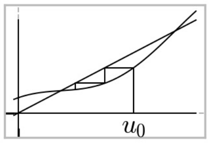
β) $u_n < 2 \Leftrightarrow e^{-n} < 2$ — **V** ☐ **F** ☐

γ) (u_n) *est majorée par* 0 — **V** ☐ **F** ☐

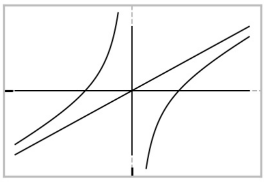
δ) *si* (v_n) *est majorée par* -2 *alors* $(u_n \times v_n)$ *est majorée par* $0 \times -2 = 0$. » — **V** ☐ **F** ☐

11 Exercices avec graphiques

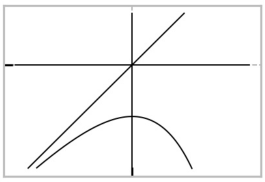
A) Les images suivantes montrent la courbe d'une fonction f.
On définit la suite (u_n) par la donnée de $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \geqslant 0$: $u_{n+1} = f(u_n)$.
Alors le bon graphique en escaliers est :

a	b	c	d
			aucun

B) On considère la figure suivante, qui présente la droite $y = x$ ainsi que la courbe (à deux branches) d'une certaine fonction f.
On définit la suite (u_n) par la donnée de $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \geqslant 0$: $u_{n+1} = f(u_n)$.Alors :

	a	si $u_0 > 0$, alors $\lim u_n = +\infty$
	b	la fonction f est paire
	c	si $u_0 > 0$, alors $\lim u_n = 0$
	d	aucune des trois

C) On considère la figure suivante, qui présente la droite $y = x$ ainsi que la courbe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - \mathrm{e}^x$.
On définit la suite (u_n) par la donnée de $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \geqslant 0$: $u_{n+1} = f(u_n)$.Alors :

	a	si $u_0 > 0$, il existe une valeur de n pour laquelle $u_n < -\mathrm{e}^{\mathrm{e}^9}$
	b	si $u_0 < 0$, alors $u_1 > 0$
	c	la tangente en a a pour équation : $y = x(1 - \mathrm{e}^a) + \mathrm{e}^a(a - 1)$
	d	il y a deux valeurs de a, l'une négative, l'autre positive, pour lesquelles cette tangente passe par $O(0;0)$

Chapitre 8
Corrigés - Suites

1 Révisions immédiates du cours

A) **Réponse** a : $u_1 = \boxed{15}$

B) **Réponse** b : $n = \boxed{18}$
Il faut écrire le terme général de (u_n) qui est $u_n = 10 + 5n$ puis résoudre $10 + 5n = 100 \Leftrightarrow 5n = 90 \Leftrightarrow n = 18$.

C) **Réponse** d : $r = \boxed{\dfrac{40-24}{50-12}}$
On applique la formule $r = \dfrac{u_n - u_p}{n - p}$ donc ici $r = \dfrac{40-24}{50-12}$.

D) **Réponse** d : $u_0 = \boxed{26}$
On applique la formule $u_n = u_0 + n \times r$ d'où $u_0 = u_{12} - 12 \times r = 26$.

E) **Réponse** b : $u_n = \boxed{18}$
Il y a deux méthodes :

- on peut résoudre $u_0 + n \times r = 62 \Leftrightarrow 26 + 2n = 62$ d'où $n = 18$;
- on peut aussi partir de u_{12} et écrire $62 = 50 + 6 \times 2$ donc il faut avancer de six termes à partir de u_{12} donc c'est u_{18}.

On rappelle maintenant que (v_n) est une suite géométrique de raison q.

F) **Réponse** d : $v_{12} = \boxed{10 \times 1,05^{12}}$
On écrit le terme général de (v_n), à savoir $v_n = v_0 \times q^n$ et donc ici : $v_{12} = 20 \times 1,05^{12}$.

G) **Réponse** d : $n = \boxed{\dfrac{\ln 10}{\ln 1,05}}$
Il s'agit de résoudre $v_0 \times q^n = 100 \Leftrightarrow q^n = 10$, on applique la fonction ln de chaque côté et cela donne : $n \ln q = 10$, donc $n = \dfrac{\ln 10}{\ln 1,05}$.

2 Premières applications

A) **Réponse** b : $\boxed{\sqrt{2}}$
Il y a deux méthodes :

- on applique la formule $q = \left(\dfrac{v_p}{v_n}\right)^{\frac{1}{p-n}}$ donc ici $q = \left(\dfrac{48}{24}\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}}$ or nous savons que la notation désigne la même chose que la notation $\sqrt{a}$ donc $q = \sqrt{2}$;
- on remarque que pour passer de v_{12} à v_{14} il faut multiplier par q^2. Or, pour passer de 24 à 48 il faut multiplier par 2. Donc $q^2 = 2$, d'où la réponse b.

B) **Réponse** c : $\boxed{4^{0,1}}$
Il y a deux méthodes :

- $q = \left(\dfrac{v_p}{v_n}\right)^{\frac{1}{p-n}} = \left(\dfrac{40}{10}\right)^{\frac{1}{21-11}} = 4^{\frac{1}{10}}$. Or on sait que $\dfrac{1}{10} = 0,1$ d'où le résultat ;
- de v_{11} à v_{21} il faut multiplier par q^{10} et aussi par 4 donc $q^{10} = 4$.

C) **Réponse a** : $\boxed{\dfrac{v_{12}}{q^{12}}}$
$v_{12} = v_0 \times q^{12}$ donc $v_0 = \dfrac{v_{12}}{q^{12}}$.

D) **Réponse a** : $\boxed{50 \times q^8}$
$v_{20} = v_0 \times q^{20}$; aucune des réponses ne semble donc convenir. Il faut donc partir de v_{12}.
Deux méthodes alors :

- soit on préfère appliquer des formules et on applique $v_n = v_p \times q^{n-p}$ d'où $v_{20} = v_{12} \times q^8$, c'est donc la réponse **a** ;
- soit on remarque que pour aller de $v_{12} = 50$ à v_{20} il faut multiplier par q^8, d'où la aussi la réponse **a**.

E) **Réponse b** : $\boxed{\text{arithmétique de raison } \dfrac{1}{3}}$
(a_n) peut s'écrire $a_n = \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3} \times n$, on reconnaît le terme général d'une suite arithmétique $a_n = a_0 + r \times n$ avec $a_0 = \dfrac{2}{3}$ et $r = \dfrac{1}{3}$.

F) **Réponse c** : $\boxed{\text{géométrique de raison e}}$
(b_n) peut s'écrire $b_n = \dfrac{1}{2} \times \mathrm{e}^n$, on reconnaît le terme général d'une suite géométrique $b_n = b_0 \times q^n$ avec $b_0 = \dfrac{1}{2}$ et $q = \mathrm{e}$.

3 Questions de logique

A) **Réponse d** : $\boxed{(u_n) \text{ diverge vers } +\infty \Leftrightarrow g^2 > 1}$
Cette question est subtile et appelle beaucoup de précision.
Examinons chacun des items un par un :

- a est fausse. En effet, supposons (u_n) croissante : la phrase affirme que forcément, dans ce cas, on aurait $k > 0$. Mais cela est faux, comme le prouve le contre exemple $u_n = -2 \times 0,5^n$;
- b est fausse : la suite définie par $u_n = 2 \times 0,5^n$ est décroissante ;
- c : ce qui est faux ici, c'est l'équivalence. En effet, l'un des deux sens pêche : l'implication « (u_n) converge vers 0 $\Rightarrow 0 \leqslant g < 1$ » est fausse. Car (u_n) converge aussi vers 0 pour toutes les valeurs de g vérifiant $-1 < g \leqslant 0$;
- **d** : cette implication est donc vraie. Elle est simplement trompeuse à cause du g^2.
  Il est clair, en vertu des résultats élémentaires sur les suites géométriques, que : « (u_n) diverge vers $+\infty \Rightarrow g > 1$ ». Et vu que $g > 1 \Rightarrow g^2 > 1$, l'implication **d** est vraie.

B) **Réponse d** : $\boxed{\text{on ne peut rien affirmer de tout cela}}$
En effet, a et c sont fausses, il suffit de prendre la suite $(1, 2, 1, 2, ...)$.
b est fausse, il suffit de prendre la suite $u_n = C^{\text{ste}} = 1$.

C) **Réponse d** : $\boxed{\text{on ne peut rien affirmer de tout cela}}$
En effet, a et c sont fausses, il suffit de prendre la suite $(1, 10, 1, 100, 1, 1000, ...)$.
b est fausse, il suffit de prendre la suite $u_n = C^{\text{ste}} = 1$.

D) **Réponse b** : $\boxed{u_n = n \times \cos\left(\dfrac{n\pi}{4}\right)}$
a est fausse, car pour $p > 1$, on a $\dfrac{1}{\sqrt{p}} > \dfrac{1}{p}$.
b est juste, car lorsque n est multiple de 8, on a $u_n = 1$.
c est fausse, à cause de l'inégalité stricte.
d est fausse, il faudrait avoir écrit $u_n = 1 - \dfrac{1}{n^2}$.

4 Questions en tableau

A) **Réponse a** : $\boxed{\nearrow}$ (question de cours)

B) **Réponse b** : $\boxed{r<0}$ (question de cours)

C) **Réponse d** : $\boxed{\text{on ne peut pas conclure}}$
La donnée de $r>0$ ne permet pas de savoir si $u_0>0$ (auquel cas la suite sera croissante) ou si $u_0<0$ (auquel cas la suite sera décroissante).

D) **Réponse d** : $\boxed{\text{on ne peut pas conclure}}$
Cela dépend si $r>1$ ou $0<r<1$.

E) **Réponse a** : $\boxed{r>1}$
Par exemple, $v_0=-2$ et $r=2$.

F) **Réponse c** : $\boxed{\text{non monotone}}$
Quand $r<0$, la suite est alternée, passant alternativement d'un négatif à un positif.

5 Questions Vrai/Faux

A) **V**
Oui, (u_n) de raison $\dfrac{1}{2}$ et (v_n) de raison $\dfrac{1}{3}$.

B) **F**
En effet, $v_n-u_n=1-\dfrac{n}{6}$ donc diverge vers $-\infty$.

C) **V**
En effet, $\lim\dfrac{v_n}{u_n}=\lim\dfrac{n/3}{n/2}=\dfrac{2}{3}$.

D) **F**
$v_n-u_n=0 \Leftrightarrow 1-\dfrac{n}{6}=0 \Leftrightarrow n=6$.
De fait, $u_6=2+3=5$ et $v_6=3+2=5$ donc $u_6=v_6$.

E) **F**
Les deux suites sont géométriques.

F) **F**
On factorise par celui dont la raison est la plus grande :
$v_n-u_n=3\times 1,2^n-2\times 1,3^n=1,3^n\left(3\left(\dfrac{1,2}{1,3}\right)^n-2\right)$.
Le terme $\left(\dfrac{1,2}{1,3}\right)^n$ tend vers 0 car $\left|\dfrac{1,2}{1,3}\right|<1$, la parenthèse tend donc vers -2, et vu que $1,3^n$ tend vers $+\infty$, alors, par produit, v_n-u_n diverge vers $-\infty$ et non pas vers $+\infty$.

G) **V**
En effet, $\dfrac{v_n}{u_n}=\dfrac{3\times 1,2^n}{2\times 1,3^n}=\dfrac{3}{2}\times\left(\dfrac{1,2}{1,3}\right)^n$ qui tend vers 0.

H) **V**
En effet, $v_n-u_n=\Leftrightarrow v_n=u_n \Leftrightarrow 2\times 1,3^n=3\times 1,2^n \Leftrightarrow \left(\dfrac{1,3}{1,2}\right)^n=\dfrac{3}{2}$, on trouve $n=\dfrac{\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)}{\ln\left(\dfrac{1,3}{1,2}\right)}$ et ceci n'est pas un nombre entier.

I) | **V** | |

(v_n) est décroissante car géométrique de raison $q=0,9\in]0,1[$, tandis que (u_n) est croissante car arithmétique de raison $r=0,9>0$.

J) | | **F** |

(u_n) tend vers $+\infty$ et ne peut donc pas être majorée.
(v_n) tend vers 0 et n'est donc pas être minorée par 2.

K) | | **F** |

(v_n) tend vers 0.

L) | **V** | |

Vrai car, $\lim \dfrac{u_n}{v_n}=\lim \dfrac{0,9\times n}{0,9^n}=0$, car d'une manière générale, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{a^x}=0$ dès que $a>1$.

M) | | **F** |

Voici un contre exemple : $v_n=\dfrac{3}{n}$, $w_n=\dfrac{2}{n}$, $u_n=\dfrac{1}{n}$.

N) | | **F** |

D'après le théorème des gendarmes, (w_n) tend aussi vers ℓ.

O) | | **F** |

Si $\ell=0$, $\left(\dfrac{1}{w_n}\right)$ peut avoir une limite infinie (ou ne pas avoir de limite du tout).
Voir le contre exemple précédent.

P) | | **F** |

Contre exemple : $\begin{cases} v_n=n+2 \\ w_n=n+2\times(-1)^n \\ u_n=n-2 \end{cases}$, on voit que $(w_n)=(2,-1,4,1,6,3,\dots)$ n'est pas croissante.
Pourtant pour tout n on a $-1\leqslant(-1)^n\leqslant 1$ donc $u_n\leqslant w_n\leqslant v_n$.

Q) | | **F** |

Contre exemple : $\begin{cases} v_n=2 \\ w_n=1+\cos(n) \\ u_n=0 \end{cases}$.

R) | **V** | |

Pour les limites, cela est clair vu que $\mathrm{e}^{-n}\to 0$.
Pour l'encadrement, on a $-1\leqslant\cos(10n)\leqslant 1$ et $0\leqslant \mathrm{e}^{-n}\leqslant 1$ (car $n\geqslant 0$ puisque c'est un entier), ce qui implique $-1\leqslant \mathrm{e}^{-n}\cos(10n)\leqslant 1$ donc $0\leqslant w_n\leqslant 2$.

S) | | **F** |

Contre exemple : $v_n=2$, $w_n=-\dfrac{1}{n}$, $u_n=-\dfrac{2}{n}$.

T) | **V** | |

Il faut ici utiliser la définition de la limite : $u_n\to 0$ et $v_n\to 2$ donc il y a un rang n_0 à partir duquel, disons, $u_n\geqslant -0,5$ et $v_n\leqslant 2,5$. A partir de ce rang-là, on a donc, w_n étant encadré entre les deux : $v_n-w_n\leqslant 2,5-(-0,5)=3$, d'où le résultat.

U) | | **F** |

Ce n'est vrai qu'à partir d'un certain rang. Contre exemple : $\ell=0$ et $u_n=\dfrac{1000}{n}$.

V) | **V** | |

Car, par définition de la limite, il existe un rang à partir duquel $|u_n-\ell|<\dfrac{1}{10}$. Il n'y a plus qu'à élever au carré.

W) | **V** | |

C'est vrai puisque c'est plus faible que la définition de $\lim u_n=\ell$, qui indique que :
« Pour tout intervalle $]\ell-\mu,\ell+\mu[$ il existe un rang $n\in\mathbb{N}$ tel que quelque soit $p>n$ on ait $u_p\in]\ell-\mu,\ell+\mu[$ ».

X) | | **F** |

Pas forcément, l'idée étant que u_n peut alterner autour de ℓ et donc $u_n - \ell$ changer de signe.
Contre exemple : $u_n = 1 + \dfrac{(-1)^n}{n}$ qui a pour limite $\ell = 1$.
On a $\dfrac{1}{u_n - \ell} = \dfrac{n}{(-1)^n} = \begin{cases} n \text{ si } n \text{ est pair} \\ -n \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$, donc (k_n) n'a pas de limite.

6 Questions ++

A) **Réponse d** : $\boxed{\text{pour tout } n \geqslant 0, \text{ on a } u_n = 1 + 3^n}$
a est fausse : le calcul des premiers termes $2, 4, 10$ donne la puce à l'oreille. L'idée c'est que le réel 1 est un point fixe ($f(x) = x$) de la fonction $f(x) = 3x - 2$, et donc les intervalles $[1; +\infty[$ et $]-\infty; 1]$ sont stables par (u_n) dans le sens où si l'un de ces deux intervalles contient u_0, il contient tous les u_n. Cela se démontre simplement par récurrence. Ici, $u_0 \in [1; +\infty[$ donc tous les u_n sont dans $[1; +\infty[$.
Ce raisonnement est toujours valable avec les suites arithmético-géométriques.
b est fausse, car $v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = 3u_n - 2 - 1 = 3u_n - 3 = 3(v_n + 1) - 3 = 3v_n$ et $v_0 = 2 - 1 = 1$ donc, d'après le cours sur les suites géométriques : $\lim (v_n) = +\infty$.
c est fausse, car, d'après ce qui précède, le terme général de (v_n) est : $v_n = 3^n$.
d est juste, car, d'après ce qui précède, le terme général de (u_n) est : $u_n = v_n + 1 = 3^n + 1$.

B) **Réponse d** : $\boxed{\text{aucune des trois}}$
Cet exercice-piège est un exemple flagrant de la nécessité de toujours calculer les premiers termes. En effet, on trouve ici $u_n = (2, 5, 2, 5, 2\ldots)$: la suite est périodique donc n'a pas de limite.
Il est intéressant de savoir que le phénomène apparaît pour toutes les suites $u_{n+1} = \dfrac{u_n + k}{u_n - 1}$ (avec $k \neq -1$).

C) **Réponse a** : $\boxed{(v_n) \text{ est géométrique de raison } 5}$
Un produit en croix donne $u_n = \dfrac{1 + 3v_n}{v_n - 1}$(1) donc b est fausse. Un long calcul donne ensuite $v_{n+1} = 5v_n$ ce qui confirme **a** et comme $v_0 = -3$, on a $v_n = -3 \times 5^n$. En remplaçant dans (1) on a $\lim u_n = 3$ donc c est fausse.

Remarque : le calcul des premiers termes pouvait permettre de conclure au **a**.
Remarque : les suites harmoniques $u_{n+1} = \dfrac{a\,u_n + b}{c\,u_n + d}$ n'ont jamais pour limite $\pm\infty$.

D) **Réponse a** : $\boxed{\text{si } (w_0 + \cdots + w_n) \text{ converge, alors } (w_n) \text{ aussi}}$
En effet, posons $Z_n = w_0 + \cdots + w_n$ et supposons que (Z_n) converge vers une limite ℓ. Alors $(Z_{n+1} - Z_n)$ converge vers $\ell - \ell = 0$ et un calcul très simple montre que $Z_{n+1} - Z_n = w_n$.
b est fausse : posons $w_n = \ln(n+2) - \ln(n+1)$ alors, par télescopage, $Z_n = \ln(n+1)$ qui diverge vers $+\infty$ et pourtant $w_n = \ln\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)$ converge vers $\ln(1) = 0$. Bien sûr, ce contre exemple n'était pas évident à trouver. L'idée du b est que lorsqu'on somme des quantités de plus en plus petites, le résultat peut néammoins être infini. Un contre exemple typique $\left(1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}\right)$ est systématiquement étudié dans le supérieur.
c est fausse, car un calcul semblable à celui mené dans le A) montre que $v_{n+1} = \dfrac{v_n}{2}$ et $v_0 = 2$ donc $v_n = \dfrac{2}{2^n}$.
d est fausse, car on a $u_n = v_n + 8 = 8 + \dfrac{2}{2^n}$ et, par la formule de sommation des suites géométriques on a $1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{2^n} = \dfrac{1 - \dfrac{1}{2^{n+1}}}{1 - \dfrac{1}{2}}$ puis $S_n = 8(n+1) + 4 - \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

7 QCM alternatifs (de 0 à 4 réponses justes)

A) $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\gamma}$ sont justes.
En effet, $\boldsymbol{\alpha}$ et $\boldsymbol{\gamma}$ disent la même chose et c'est exactement la définition de la limite $\lim u_n = +\infty$.
β et δ sont fausses, il suffit de prendre le contre exemple : $u_n = 1, 2, 0, 3, 4, 0, 5, 6, 0, 7\ldots$

B) $\boldsymbol{\beta}$ est juste.
α est fausse : ceci n'est vrai que si la suite est à termes positifs ! La suite définie par $u_n = -\dfrac{1}{n}$ est croissante mais ne vérifie pas cela.
γ est fausse. Cependant si c'est faux ce ne peut être que pour une seule valeur de n. En effet, si (u_n) croît, elle ne peut changer de signe qu'une seule fois au maximum.
δ est fausse. Contre exemple : $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{n}$. Cette est croissante car $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n} \geqslant 0$, pourtant $u_{n+1} - u_n < 1$.

C) $\boldsymbol{\delta}$ est juste.
α est fausse car la suite est alternée : elle passe d'un négatif à un positf, et ainsi de suite.
β est fausse car de manière imagée, un terme sur deux tend vers $+\infty$ et l'autre vers $-\infty$.
γ est fausse et $\boldsymbol{\delta}$ est juste car $\cos(n\pi) = (-1)^n$.

8 Familles, algo et récurrences

A) **Réponse b** : $\boxed{\text{si } P_n \text{ est vraie alors } P_{n+2} \text{ est vraie}}$
a est fausse si $a < 0$.
b est juste car $u_{n+2} = a^2 u_n$.
c est fausse si $u_0 < 0$.
d est fausse, contre exemple : $u_0 = -1$ et $a = 0,5$.

B) **Réponse c** : $\boxed{\text{la suite } (S_n) \text{ définie par } S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n \text{ diverge vers } -\infty}$
Remarquer que (u_n) est arithmétique de raison $r = -1/4$ et (v_n) géométrique de raison $q = 1/1,5$.
a est fausse, car on somme 91 termes et non pas 90.
b est fausse, car la raison de (v_n) est $1/1,5$ et non pas 1,5.
c est juste, car $u_n \to -\infty$ donc *a fortiori* $S_n \to -\infty$ aussi.
d est fausse, car $S'_n = v_1 \times \dfrac{1 - 1/1,5^n}{1 - 1/1,5}$, or $1/1,5^n \to 0$ d'où S'_n tend vers un réel fini.

C) **Réponse d** : $\boxed{b_0 + b_1 + \cdots + b_{99} \text{ est un nombre pair}}$
Les premiers termes sont $(1, 1, 3, 5, 5, \ldots)$, ce qui montre sans autre calcul que a,b,c sont fausses.
d est juste, car pour tout n on a $b_{2n} = b_{2n+1}$ donc $b_0 = b_1, \ldots, b_{98} = b_{99}$.

D) **Réponse b** : $\boxed{A = \displaystyle\sum_{i=21}^{30} \frac{1}{i \times (i-1)}}$
a et c sont fausses, car A contient 10 termes.
d est fausse, car le plus grand terme de A est $\dfrac{1}{20 \times 21} < \dfrac{1}{400}$ donc $A < 10 \times \dfrac{1}{400} = 0,4$.
On peut aussi remarquer que $\dfrac{1}{i \times (i-1)} = \dfrac{1}{i-1} - \dfrac{1}{i}$ donc la suite est télescopique :

$$A = \frac{1}{20} - \cancel{\frac{1}{21}} + \cancel{\frac{1}{21}} - \cancel{\frac{1}{22}} + \ldots + \cancel{\frac{1}{29}} - \frac{1}{30} = \frac{1}{20} - \frac{1}{30}.$$

E) **Réponse d** : $\boxed{\texttt{1/(A1+1)}}$
a est fausse, car cette formule donne la relation $u_{n+1} = 1/u_n + 1$ qui ne correspond pas à l'énoncé.
b est fausse, car un `n` dans un tel tableur n'a pas de sens.
c n'est juste que pour `A2` : en recopiant vers le bas, cette formule donnera toujours la valeur $1/2$.

9 Réflexion autour d'un thème mathématique

$\boxed{\text{Thème : \textbf{les limites}.}}$

A) **Réponse c** : $\boxed{\text{la suite } (-\ln u_n) \text{ croît vers } +\infty}$

a est fausse, car si (u_n) décroît vers 0, à partir d'un moment, (u_n) passera dans $[0;\pi]$ et donc, à partir de ce rang-là, $(\cos u_n)$ croîtra.
b est fausse : cette suite a clairement pour limite 1.
c est juste : déjà, l'énoncé assure que $u_n > 0$ pour tout n donc $\ln u_n$ est toujours bien défini. Ensuite, $u_n \to 0^+ \Rightarrow \ln u_n \to -\infty$ d'où le résultat.
d est fausse, car $-\dfrac{1}{u_n} \to -\infty$ donc son exponentielle tend vers 0.

B) **Réponse d** : $\boxed{\text{aucune des trois}}$

a est fausse : il suffit de prendre $u_n = n$ et $v_n = n + 1/n$ ou $u_n = \cos n$ et $v_n = \cos n + 1/n$.
b est fausse : prendre $u_n = \dfrac{1}{n}$ et $v_n = \dfrac{1}{n^2}$.
c est fausse : prendre $u_n = n$ et $v_n = n + 1/n$.

C) **Réponse a** : $\boxed{(u_n)^2 - (v_n)^2 \to 0}$

a est juste, car $(u_n)^2$ et $(v_n)^2$ convergent toutes deux vers 1 donc leur différence vers 0.
b est fausse : prendre $u_n = v_n = (-1)^n$.
c est fausse : prendre $u_n = 1$ et $v_n = -1$.

D) **Réponse c** : $\boxed{\text{une suite qui tend vers } +\infty \text{ mais qui n'est pas croissante}}$

a est fausse car dans ces conditions on a pour tout n : $u_n \geqslant 1$.
b est fausse car si elle est croissante majorée, elle a une limite finie, et si elle est croissante non majorée, elle a pour limite $+\infty$. Même raisonnement si (u_n) est décroissante.
c est juste. Multiples exemples : $u_n = n + 2 \times (-1)^n$, $u_n = (10, 9, 20, 19, 30, 29, 40, 39, \ldots)$.
d est fausse car « stationnaire » signifie qu'une suite est constante à partir d'un certain rang.

$\boxed{\text{Thème : \textbf{les suites bornées}.}}$

E) **Réponse c** : $\boxed{\text{il existe des suites majorées qui tendent vers } -\infty}$

a est fausse : prendre $u_n = (-1)^n$ ou $u_n = \cos n$.
b est fausse : une suite qui tend vers $+\infty$ ne peut pas, par définition, être majorée.
c est juste : toute suite qui tend vers $-\infty$ est majorée...
d est fausse : voir question précédente $u_n = (10, 9, 20, 19, 30, 29, 40, 39, \ldots)$.

F) **Réponse b** : $\boxed{\text{la suite } (\mathrm{e}^{u_n}) \text{ est bornée}}$

a est fausse : prendre $u_n = \dfrac{1}{n}$.
b est juste : si $a \leqslant u_n \leqslant b$ pour tout n alors $\mathrm{e}^a \leqslant \mathrm{e}^{u_n} \leqslant \mathrm{e}^b$.
c et d sont fausses : prendre $u_n = (-1)^n$.

10 Rédactions d'élèves imaginaires...

A) Réponses :

α)

V	

β)

	F

Ici il faut bien regarder le cours : f croissante $\Rightarrow (u_n)$ monotone. Donc (u_n) peut être croissante ou décroissante. (u_n) peut aussi converger vers des valeurs ℓ vérifiant $f(\ell) = \ell$. Pour s'en convaincre, il suffit de faire le schéma des escaliers avec u_0 prenant la valeur -2 puis la valeur $-0,5$ puis la valeur $0,5$, puis la valeur 2.

γ)

V	

δ)

V	

B) Réponses :

$\alpha)$ **F**

Faux, car Baptiste n'a pas compris la différence entre u_n qui désigne le n-ième terme de la suite, et (u_n) qui désigne la suite dans son ensemble. La formulation correcte serait $\alpha')$ « (u_n) est croissante ».

$\beta)$ **F**

Faux, car c'est le premier terme qui vaut -22. La raison est 1.

$\gamma)$ **V**

$\delta)$ **V**

C) Réponses :

$\alpha)$ **V**

Vrai car pour tout $n, u_n > v_n - 1$; or $v_n \to +\infty$ implique $v_n - 1 \to +\infty$ d'où $v_n \to +\infty$.

$\beta)$ **V**

$\gamma)$ **F**

Faux car une suite asymptote oblique à une autre, cela ne veut pas dire grand chose.

$\delta)$ **F**

Faux, car personne, dans votre cours, n'a défini la dérivée d'une suite. Une telle notion pourrait être définie, mais il ne faut pas employer des termes dont on ne connaît pas le sens précis.

D) Réponses :

$\alpha)$ **F**

Effectivement, (u_n) est croissante et converge, mais la phrase semble dire que toute suite croissante converge, ce qui est faux ; contre exemple : $u_n = \mathrm{e}^n$.

$\beta)$ **F**

Les deux inégalités ne peuvent être équivalentes puisque la seconde est toujours fausse et pas la première. Il aurait fallu inverser le sens de l'inégalité.

$\gamma)$ **V**

$\delta)$ **F**

Faux, car le produit $u_n \times v_n$ sera positif; il suffit de prendre le contre exemple $v_n = -2$.

11 Exercices avec graphiques

A) **Réponse c**

En effet, pour aller chercher u_1, on doit placer u_0 en abscisse (ce qui élimine la réponse a), puis aller chercher u_1 sur la courbe de la fonction (ce qui élimine b). C'est le graphique **c** qui est le bon.

B) **Réponse d** : $\boxed{\text{aucune des trois}}$

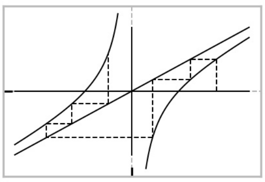


Figure 8.1.

Si $u_n > 0$, alors (u_n) commence à décroître jusqu'à être négatif, puis « passe de l'autre côté », c'est-à-dire qu'à ce moment-là, (u_n) commence à croître jusqu'à « devenir positif », puis « passe de l'autre côté ».
Donc a et c sont fausses.

Quant à b, elle est fausse car le graphique montre plutôt la courbe d'une fonction impaire.

C) **Réponse a** : $\boxed{\text{si } u_0 > 0\text{, il existe une valeur de } n \text{ pour laquelle } u_n < -\mathrm{e}^{\mathrm{e}^9}}$

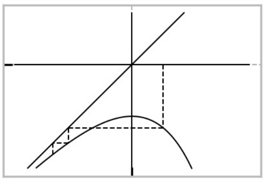


Figure 8.2.

a est juste : en effet, la courbe montre que pour $u_0 > 0$ on a $u_1 < 0$ et qu'ensuite (u_n) diverge vers $-\infty$. Le nombre $-\mathrm{e}^{\mathrm{e}^9}$ est juste un grand négatif. Et par définition de $\lim u_n = -\infty$, on peut affirmer qu'à partir d'un certain rang, u_n est inférieur à n'importe quel réel négatif donné.
b est fausse, car si $u_0 > 0$, tous les u_n sont alors négatifs.
c est fausse, car $f'(x) = 1 - \mathrm{e}^x$ et l'équation de la tangente en a est :

$$\begin{aligned} y &= (1-\mathrm{e}^a)(x-a) + a - \mathrm{e}^a \\ &= (1-\mathrm{e}^a)\,x - a + a\,\mathrm{e}^a + a - \mathrm{e}^a \\ &= (1-\mathrm{e}^a)\,x + (a-1)\mathrm{e}^a. \end{aligned}$$

L'énoncé a proposé $(a+1)\mathrm{e}^a$ au lieu de $(a-1)\mathrm{e}^a$.
d est fausse, car pour $a \in \mathbb{R}$ donné, la tangente en a passe par $(0,0)$ si et seulement si :

$$\begin{aligned} 0 = (1-\mathrm{e}^a) \times 0 + (a-1)\,\mathrm{e}^a &\Leftrightarrow 0 = (a-1)\mathrm{e}^a \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ \text{ou} \\ \mathrm{e}^a = 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

Or, la condition $\mathrm{e}^a = 0$ n'est jamais vérifiée sauf si l'on imagine que $a \to -\infty$. Visuellement, cela veut dire que la tangente en $a < 0$ « s'approche » du point $(0,0)$ sans jamais l'atteindre.

Chapitre 9

Énoncés - Complexes

1 Révisions immédiates du cours

A) $3\mathrm{i}\sqrt{2}$ peut s'écrire aussi :

a	b	c	d
$-\sqrt{18}$	$\mathrm{i}\sqrt{18}$	$\mathrm{i}\sqrt{3}$	$6\mathrm{i}$

B) On pose $w=-4-3\mathrm{i}$. Alors le module de w est :

a	b	c	d
$\sqrt{-25}$	$\sqrt{7}$	5	25

C) On pose $a=\sqrt{3}-3\mathrm{i}$. Alors l'argument de a est :

a	b	c	d
$-\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{3}$	$-\dfrac{2\pi}{3}$	$\dfrac{2\pi}{3}$

D) L'argument de $b=\mathrm{e}^{-3}$ est :

a	b	c	d
0	-3	$\ln(b)$	$3+\pi$

E) On pose $k=5-2\mathrm{i}$ et $f=1-2\mathrm{i}$. Alors l'un des nombres suivants est imaginaire pur :

a	b	c	d
$k-f^2$	$k-\lvert f\rvert^2$	$\lvert k-f\rvert^2$	$\lvert k\rvert-\lvert f\rvert^2$

F) On considère l'équation $(E)\ z^2+z+1=0$. Alors :

a	(E) n'a pas de solutions dans $\mathbb{C}$
b	$j=\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}$ est une solution de (E)
c	(E) a une unique solution dans $\mathbb{C}$
d	les solutions de (E) sont $\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\dfrac{1}{2}-\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

G) Soit f la fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui a tout z associe $f(z)=2z-3\mathrm{i}$. Alors :

a	le nombre $u=-3\mathrm{i}$ a pour image lui-même par f
b	l'équation $f(z)=0$ possède deux solutions dans $\mathbb{C}$
c	pour tout z, le conjugué de $f(z)$ est $2z+3\mathrm{i}$
d	l'antécédent de $-2\mathrm{i}$ par f est $\dfrac{\mathrm{i}}{2}$

H) On pose $j=\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}$. Alors :

a	b	c	d
$j+j^2=-1$	$j^2=-\bar{j}$	$j=(1-j)^2$	$\arg(j)=\left(\dfrac{\pi}{3}\right)^2$

I) On pose $t=2(1+\mathrm{i})\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{3}}$. Alors :

a	b	c	d
$\arg(t)=\dfrac{\pi}{12}$	$\lvert t\rvert=2$	$t=1+\mathrm{i}\sqrt{3}-\mathrm{i}-\sqrt{3}$	$t^2=8\,\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{6}}$

J) Soit U le point d'affixe $u=2$. L'ensemble des points Z d'affixe z telle que $|z-2|=2$ est :

a	le point U
b	la droite verticale passant par U
c	l'ensemble des deux droites d'équations $x=2$ et $x=-2$
d	le cercle de centre U et de rayon 2

K) Le module de $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$ est :

a	b	c	d
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

2 Premières applications

A) Soient H et M les points d'affixe respective $h=3\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{8}}$ et $m=-3\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{8}}$. Alors :

a	H et M sont symétriques par rapport à l'axe horizontal
b	H et M sont symétriques par rapport à l'axe vertical
c	H et M sont symétriques par rapport à l'origine du repère
d	aucune des trois

B) Soient h et m comme dans la question précédente. Alors $h+m$ est :

a	un réel strictement positif
b	un réel strictement négatif
c	un imaginaire pur de la forme $\mathrm{i}k$ avec $k<0$
d	un imaginaire pur de la forme $\mathrm{i}k$ avec $k>0$

C) On pose $d=2-2\mathrm{i}$. Alors $d^9=$

a	b	c	d
$(\sqrt{2})^{27}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{4}}$	$512-512\mathrm{i}$	$(\sqrt{2})^{27}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{4}}$	$-512+512\mathrm{i}$

D) On pose $g=2\mathrm{i}\sqrt{6}-2\sqrt{2}$. Alors $\arg(g^5)=$

a	b	c	d
$-\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$

E) Soient U et V les points d'affixe respective $u=2$ et $v=-2$. L'ensemble des points Z d'affixe z telle que $|z-2|=|z+2|$ est :

a	l'axe des ordonnées
b	l'ensemble $\{U,V\}$
c	l'ensemble des deux droites d'équations $x=2$ et $x=-2$
d	le cercle de centre U et de rayon 2

F) Soit $z\in\mathbb{C}^*$. L'expression $\left(\frac{z}{|z|}\right)^2$ est aussi égale à :

a	b	c	d
1	$\frac{\bar{z}}{z}$	$\left(\frac{\bar{z}}{\lvert z\rvert}\right)^2$	$2\times\arg(z)$

3 Questions de logique

A) Si $|z|=2$ alors on peut affirmer que :

a	$z=2\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{4}}$
b	$\arg(z)=2$
c	$\lvert z-2\rvert=0$
d	il existe un $\theta\in\mathbb{R}$ tel que $z-2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=0$

B) On suppose fausse l'affirmation $\arg(z)=\dfrac{\pi}{4}(\bmod 2\pi)$. Alors on peut affirmer que :

a	$\arg(z)=-\dfrac{\pi}{4}(\bmod 2\pi)$
b	$z\neq 1+\mathrm{i}$
c	$\lvert z\rvert\neq 1$
d	$z^2\neq \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{2}}$

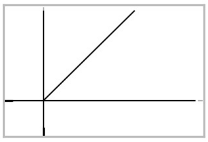
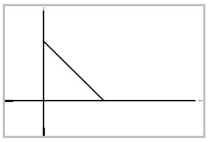
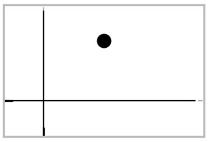
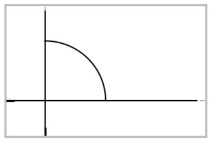
C) Soit z tel que $\Re(z-2)\geqslant 3$. Alors :

a	$\Im(z)=5\Leftrightarrow 2=5+5i$
b	$\Re(z)\leqslant 5\Leftrightarrow z=5+\mathrm{i}$
c	$\arg(z)=\dfrac{2\pi}{3}(\bmod \pi)\Leftrightarrow \arg(z)=-\dfrac{\pi}{3}(\bmod 2\pi)$
d	$\lvert z\rvert\leqslant 5\Rightarrow \Im(z)=0$

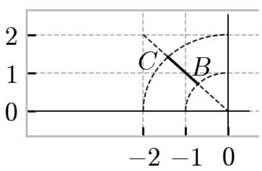
D) Pour tout complexe z, on appelle *racine carrée* de z tout complexe y tel que $y^2=z$. Alors :

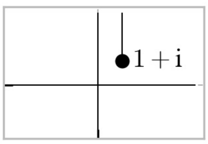
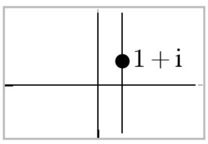
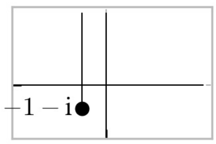
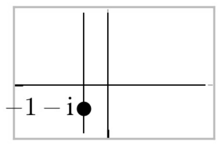
a	tout complexe non nul admet deux racines carrées conjuguées
b	tout complexe non nul admet deux racines carrées opposées
c	tout complexe non nul admet deux racines carrées pas forcément conjuguées ni opposées
d	il y a des complexes non nuls qui admettent aucune ou une seule racine carrée

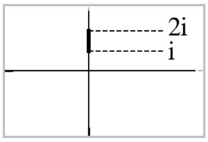
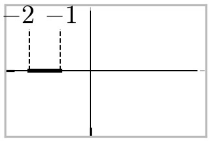
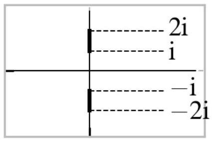
4 Questions en tableaux

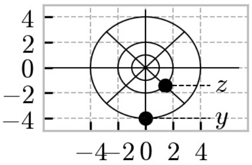
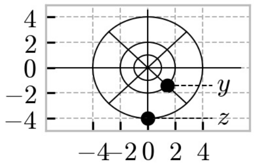
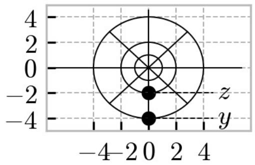
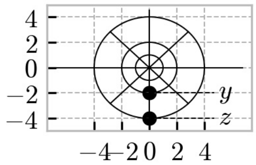
A) L'équation $\arg(z)=\dfrac{\pi}{4}(\bmod 2\pi)$ correspond au lieu :			
a	**b**	**c**	**d**
			

B) Dans la figure suivante, le segment $[BC]$ correspond à l'équation :

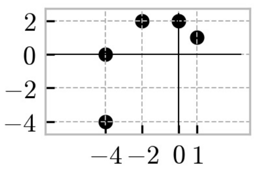
	**a**	$\begin{cases}\arg(z)=\dfrac{3\pi}{4}\\ 1<\lvert z\rvert<2\end{cases}$	**b**	$\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}<\arg(z)<\pi\\ 1<\lvert z\rvert<2\end{cases}$
	c	$\begin{cases}\arg(z)=-\dfrac{\pi}{4}\\ \sqrt{2}<\lvert z\rvert<2\sqrt{2}\end{cases}$	**d**	$\begin{cases}\arg(z)=-\dfrac{5\pi}{4}\\ \sqrt{2}<\lvert z\rvert<2\sqrt{2}\end{cases}$

C) L'équation $\arg(z-1-\mathrm{i})=\dfrac{\pi}{2}(\bmod 2\pi)$ correspond au lieu :			
a	**b**	**c**	**d**
			

D) L'équation $z^2 \in [-4,-1]$ correspond au lieu :			
a	**b**	**c**	**d**
			aucun des trois

E) Un schéma correspondant à $z^2 = y$ peut être :			
a	**b**	**c**	**d**
			

F) Ce schéma peut correspondre à :

	**a**	la suite $\begin{cases} z_{n+1} = z_n - 2z_{n-1} + 2\mathrm{i} \\ z_0 = 1 + \mathrm{i} \\ z_1 = 2\mathrm{i} \end{cases}$	**b**	la suite $\left(\left(\sqrt{2}\right)^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi/2}\right)$
	c	la suite $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi/4}\right)$	**d**	la suite (z^n) avec $z = 1 + \mathrm{i}$

5 Questions Vrai/Faux

On donne A d'affixe $a = 5 - \mathrm{i}\sqrt{3}$ et O le centre du repère.
OAB est équilatéral direct, C est le milieu de $[OA]$, D le point tel que $d - c = \frac{1}{2}(b - a)$.
Enfin, G est l'intersection des droites (AD) et (BC).

Alors :

A) On a $b = 3\sqrt{3} + \mathrm{i}$. **V** ☐ **F** ☐

B) D est le milieu de $[BO]$. **V** ☐ **F** ☐

C) G est le centre de gravité du triangle OAB. **V** ☐ **F** ☐

D) $(OG) \perp (AB)$. **V** ☐ **F** ☐

On considère z_1 de module 2 et d'argument $\frac{\pi}{3}$, ainsi que $z_2 = \overline{z_1}$ et $z_3 = 1 + \mathrm{i}$.

Alors :

E) $\left|\frac{(z_3)^8 \times (z_1)^9}{(z_2)^{11}}\right| = 4$. **V** ☐ **F** ☐

F) $\frac{(z_1)^4 \times (z_2)^7}{(z_3)^6} = -\mathrm{i}2^8$. **V** ☐ **F** ☐

G) $(z_1 - z_3)^4 = 28 - 16\sqrt{3}$. **V** ☐ **F** ☐

H) L'ensemble des points Z dont l'affixe z vérifie $\arg(z) = \arg(z_3) (\mathrm{mod}\, 2\pi)$ est la droite d'équation $y = x$. **V** ☐ **F** ☐

On considère les points A et B d'affixe respective $a=1$ et $b=2\mathrm{i}$.
On désigne par :
(E) l'ensemble des points Z d'affixe z telle que $|z-2\mathrm{i}|=|z-1|$, et
(F) l'ensemble des points Z (distincts de A et B) d'affixe z telle que $\arg\left(\dfrac{z-2\mathrm{i}}{z-1}\right)=\dfrac{\pi}{2}(2\pi)$.

Alors :

I) (E) est un cercle. **V** ☐ **F** ☐

J) (F) est un cercle privé de deux points. **V** ☐ **F** ☐

K) Le point C d'affixe $c=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\mathrm{i}}{2}$ appartient à (E) et à (F). **V** ☐ **F** ☐

L) (F) est aussi l'ensemble des points Z dont l'affixe z vérifie : $\dfrac{z-2\mathrm{i}}{z-1}$ imaginaire pur. **V** ☐ **F** ☐

On considère les trois fonctions $f(z)=2z$, $g(z)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}z$ et $h(z)=z+2+\mathrm{i}$.
On considère les points A, A', B, B', C, D tel que :
$f(A)=B$ et $f(A')=B'$; $g(B)=C$; $h(B)=D$.

Alors :

M) $BB'=2AA'$. **V** ☐ **F** ☐

N) OBC est équilatéral direct. **V** ☐ **F** ☐

O) On peut avoir $A=D$. **V** ☐ **F** ☐

P) On peut avoir $B=D$. **V** ☐ **F** ☐

Soient A d'affixe $a=2$ et B d'affixe $b=-3-\mathrm{i}$.
Soit C l'intersection de la droite (OB) avec la médiatrice de $[OA]$.
On considère les deux équations suivantes : $(E_1)\ |z|=|z-2|$ et $(E_2)\ \arg(z)=\arg(z+3+\mathrm{i})$.

Alors :

Q) L'ensemble des points M dont l'affixe z verifie (E_1) est la médiatrice de $[OA]$. **V** ☐ **F** ☐

R) L'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie (E_2) est le segment $]OB[$ (segment privé de O et de B). **V** ☐ **F** ☐

S) L'affixe du point C vérifie simultanément (E_1) et (E_2). **V** ☐ **F** ☐

T) Le point C a pour coordonnées $\left(1;\dfrac{1}{3}\right)$. **V** ☐ **F** ☐

On considère les points A, B, C d'affixes respectives :
$a=\sqrt{6}-\mathrm{i}\sqrt{2}$, $b=-2-2\mathrm{i}$ et $c=\dfrac{ab}{2\sqrt{2}}$.

Alors :

U) OAC est isocèle en O et $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}\right)=-\dfrac{3\pi}{4}$. **V** ☐ **F** ☐

V) OBC est isocèle en O et $\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\right)=-\dfrac{\pi}{6}$. **V** ☐ **F** ☐

W) Le nombre complexe $d=\dfrac{a}{|a|}-\dfrac{b}{|b|}$ a un module inférieur ou égal à 2. **V** ☐ **F** ☐

X) L'argument de $\dfrac{a}{\bar{a}}\times\dfrac{b}{\bar{b}}$ est $\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{2}$. **V** ☐ **F** ☐

6 Questions ++

A) On considère, dans $\mathbb{C}$, l'équation $(E)\ z^2-2\bar{z}+1=0$:

a	cette équation possède deux solutions
b	$z=x+\mathrm{i}y$ solution de (E) $\Leftrightarrow$ $y^2=(x-1)^2$
c	les complexes $a=-1-2\mathrm{i}$ et $b=\bar{a}$ sont les deux uniques solutions de (E)
d	(E) possède trois solutions

B) Soit f qui a tout point Z d'affixe $z \neq 1$ associe le point Z' d'affixe $z' = \frac{2z+1}{z-1}$.

a	l'équation $f(M) = M$ possède deux points solutions, d'affixes opposées
b	l'ensemble des points Z tels que $z' \in \mathbb{R}$ est l'axe des abscisses éventuellement privé d'un point
c	l'ensemble des points Z tels que $\lvert z' \rvert = 2$ est un cercle éventuellement privé d'un point
d	tout point Z' possède un antécédent par f

C) Soit A le point d'affixe $a = -\mathrm{i}$. Soit f l'application qui à tout point Z d'affixe $z \neq a$ associe le point Z' d'affixe $z' = \frac{z}{z+\mathrm{i}}$. Dans tout l'énoncé on suppose que $z \neq 0$.

a	on a $OZ' = \frac{1}{AZ}$
b	on a $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OZ'}\right) = \left(\overrightarrow{OZ}, \overrightarrow{AZ}\right)$
c	si Z' est un point du cercle de centre O (l'origine) et de rayon 1, alors Z est sur une droite parallèle à l'axe des ordonnées
d	si Z' est sur l'axe des ordonnées, alors Z est sur le cercle de diamètre $[OA]$

D) On donne $z \in \mathbb{C}^*$ et z' le conjugué de l'opposé du carré de z. Alors :

a	$z' = z \Leftrightarrow \arg(z) = \pm\frac{\pi}{3} (\mathrm{mod}\, 2\pi)$
b	Z et Z' peuvent être symétriques par rapport à l'axe des ordonnées
c	z et z' ne sont jamais conjugués
d	z réel ssi z' imaginaire pur et vice versa

E) Soit D un point d'affixe $d \neq 0$ et $\mathcal{C}$ le cercle passant par O (l'origine) et de centre D. Soit Z un point de $\mathcal{C}$. Alors :

a	la distance ZO est minorée par un réel strictement supérieur à 0
b	l'affixe de Z peut être égale à celle de D
c	il y a une et une seule position de Z telle que la partie réelle de Z soit égale à la partie réelle de D
d	il y a une et une seule position de Z telle que $z = 2d$

F) Soient A, B, D, U, G d'affixes respectives $a = 5+2\mathrm{i}$, $b = -1+\mathrm{i}$, $d = (a^2 b - a\, b^2)^2$, $u = 4 - \mathrm{i}$, $g = \frac{a}{b}$. On considère C un point tel que ABC soit rectangle en C. Alors :

a	d est un imaginaire pur
b	l'un des points G, U, D, C est sur le cercle de diamètre $[AB]$
c	g a pour argument $-\frac{\pi}{6}$
d	U est le milieu de $[DG]$

7 QCM alternatifs (de 0 à 4 réponses justes)

A) Un complexe z vérifie $\lvert z \rvert < 1$ et $-\pi < a < 0$, où a désigne un argument de z. Alors z peut être égal à :

α	β	γ	δ
i	$\frac{\pi}{7} \mathrm{e}^{\frac{8\mathrm{i}\pi}{7}}$	$\mathrm{e}^{-\frac{3\mathrm{i}}{4}}$	$\frac{1}{2\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}}$

B) Un complexe z vérifie $z^2 = \mathrm{i}k$ avec $k \in \mathbb{R}^{+*}$. Alors z peut être égal à :

α	β	γ	δ
$1+\mathrm{i}$	$\mathrm{e}^{\frac{9\mathrm{i}\pi}{8}}$	$-k$, avec $k \in \mathbb{R}$	$\frac{1}{1-\mathrm{i}}$

C) Un complexe z vérifie $\mathrm{Re}(z)^2 + (\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z))^2 = 0$. Alors forcément :

α	β	γ	δ
$z = 0$	$\arg(z) = \pm\frac{\pi}{4} (\mathrm{mod}\, \pi)$	z^2 imaginaire pur	$\lvert z \rvert = 1$

D) Les points O, T, A, K d'affixes $0, t, a, k$ vérifient : $OTAK$ est un carré direct. Alors forcément :

α	β	γ	δ
$t=\mathrm{i}k$	$k=\mathrm{i}t$	$a=\mathrm{i}k$	$t^2=-k^2$

8 Sommations, familles de fonctions, tableurs, récurrences, algos

On revient ici au principe « une seule réponse juste ».

A) Soit $S_n=1+j+j^2+\cdots+j^n$ avec $j=\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}$. Alors :

a	S_n est nul pour plusieurs valeurs de n
b	pour tout $n\geqslant 0$ on a $S_n=1-j^{n+1}$
c	$\Re(S_n)=1+\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(-\frac{1}{2}\right)^n$
d	$\lvert S_n\rvert\to+\infty$ lorsque $n\to+\infty$

B) On définit la suite (u_n) par $\begin{cases} u_0\in\mathbb{C} \\ u_{n+1}=(u_n)^2+1. \end{cases}$ Alors :

a	la propriété $\lvert u_n\rvert>2$ est héréditaire
b	la propriété $\lvert u_n\rvert>1$ est héréditaire
c	la propriété $\lvert u_n\rvert<1$ est héréditaire
d	la propriété $\lvert u_n\rvert<2$ est héréditaire

C) Soit le tableur suivant :

	A	B
1	3	-5
2		

On souhaite calculer en `B2` la valeur de $\Im(\overline{a^2})$ où $a=3-5\mathrm{i}$. On doit alors taper en `B2` :

a	`(A1+B1)^2`
b	`B1^2`
c	`A1^2-B1^2`
d	`-2*A1*B1`

D) On considère l'algorithme suivant :

Algorithme
I. $z\leftarrow 1$ `et` $n\leftarrow 0$
II. `tant que` $n<10$:
III. $z\leftarrow 1,1\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/20}\,z$
IV. $n\leftarrow n+1$

On considère le contenu de la variable z lorsque la boucle s'arrête. Alors :

a	$\lvert z\rvert<1,1$
b	z est imaginaire pur
c	la boucle ne s'arrête jamais
d	z est réel

9 Réflexion autour de quelques thèmes mathématiques

Thème 1 : **l'argument**.

A) Un nombre complexe non nul donné :

a	peut posséder plusieurs arguments
b	possède toujours un seul argument
c	possède toujours plusieurs arguments
d	peut posséder un seul argument

B) Si $\arg(z) = \frac{\pi}{4} (\mathrm{mod}\, \pi)$, alors :

a	z peut être égal à $1 - \mathrm{i}$
b	le point Z d'affixe z est forcément sur la droite d'équation $y = x$
c	z^2 peut avoir pour argument $-\frac{\pi}{2}$
d	$\frac{7\pi}{4}$ est un argument de z

C) Soient A, A', B d'affixe respective a, a', b. Si $\arg(a - b) = \arg(a' - b)$ modulo 2π, alors :

a	B, A, A' sont alignés dans cet ordre
b	B, A', A sont alignés dans cet ordre
c	les demi-droites $[AB)$ et $[BA')$ sont confondues
d	A est sur la demi-droite $[BA')$

D) On se place dans le repère standard $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

L'argument de $\frac{-c}{c - b}$ est égal à :

a	$(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CO})$
b	$(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{OC})$
c	$(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CO})$
d	$(\vec{u}, \overrightarrow{BC})$

E) Une équation d'un demi-cercle de diamètre $[AB]$ éventuellement privé de A ou de B est :

a	« $\frac{z-a}{z-b}$ réel négatif »
b	$\arg\left(\frac{z-a}{z-b}\right) = -\frac{\pi}{2} (\mathrm{mod}\, 2\pi)$
c	$\arg\left(\frac{z-a}{z-b}\right) = -\frac{\pi}{2} (\mathrm{mod}\, \pi)$
d	$\arg(z) = \arg(b - a)$

F) Une équation du segment $[AB]$ éventuellement privé de A ou de B est :

a	« $\frac{z-a}{z-b}$ réel négatif »
b	$\arg\left(\frac{z-a}{z-b}\right) = -\frac{\pi}{2} (\mathrm{mod}\, 2\pi)$
c	$\arg\left(\frac{z-a}{z-b}\right) = -\frac{\pi}{2} (\mathrm{mod}\, \pi)$
d	$\arg(z) = \arg(b - a)$

10 Rédactions d'élèves imaginaires...

A) Karl écrit : « *Je veux démontrer une formule trigonométrique. Soient a et b deux réels.*

α) *J'utilise le théorème de Moivre, qui affirme que pour tout point M du plan complexe on a* $\mathrm{e}^{\mathrm{i}M} = \cos(M) + \mathrm{i}\sin(M)$, **V** ☐ **F** ☐

β) *j'écris que* $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(a+b)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}a}\mathrm{e}^{\mathrm{i}b}$, **V** ☐ **F** ☐

γ) *je passe le β) en forme algébrique avec la formule de Moivre :*
$\cos(a + b) + \mathrm{i}\sin(a + b) = (\cos a + \mathrm{i}\sin a)(\cos b + \mathrm{i}\sin b)$, **V** ☐ **F** ☐

δ) *je développe et je prends la partie réelle, je démontre alors que :*
$\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$». **V** ☐ **F** ☐

B) Luke écrit « *J'ai $a = 2$, $b = -2\mathrm{i}$, $c = -3 + \mathrm{i}$, $d = -1 + 3\mathrm{i}$, $y = 4 + \mathrm{i}$.*

Je veux savoir si certains de ces points sont sur des cercles communs.

α) *le cercle $\mathcal{C}$ passant par A et B a pour centre le milieu de $[AB]$;* **V** ☐ **F** ☐

β) *A, B, Y ne sont pas cocycliques ;* **V** ☐ **F** ☐

γ) *D ne peut pas être sur le cercle de diamètre $[BC]$ car les longueurs DB et DC ne sont pas égales ;* **V** ☐ **F** ☐

δ) *$ABCD$ est un rectangle, donc A, B, C, D sont cocycliques* ». **V** ☐ **F** ☐

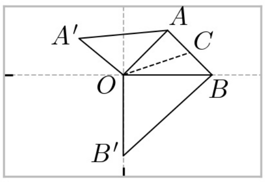
C) Moustacha écrit : « *Soit z un nombre complexe.*
Je m'intéresse aux propriétés du module de z :
α) *le module du conjugué de z est le conjugué du module de z ;* **V** ☐ **F** ☐
β) *le module de $z+2$ est inférieur ou égal à $|z|+2$;* **V** ☐ **F** ☐
γ) *le module de $z+2$ est égal à $|z|+2$;* **V** ☐ **F** ☐
δ) *le module de $2z$ est égal à $2|z|$* ». **V** ☐ **F** ☐

D) Nikita écrit : « *Soit $a=2+\mathrm{i}$. Je veux construire B tel que BOA soit équilatéral indirect.*
α) *je m'aperçois que $b=2\mathrm{i}$ conviendrait très bien mais je vais malgré tout me lancer dans le calcul ;* **V** ☐ **F** ☐
β) *si $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)=\frac{\pi}{3}$ alors BOA sera équilatéral indirect ;* **V** ☐ **F** ☐
γ) *j'ai le droit d'écrire que $\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{3}}\times a=\left(-\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(2+\mathrm{i})\approx 1,9-1,2\mathrm{i}$;* **V** ☐ **F** ☐
δ) *le calcul $b=\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{3}}a$ donne le point B recherché* ». **V** ☐ **F** ☐

11 Exercices avec graphiques

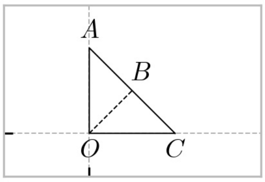
Dans les exercices, on note en minuscule l'affixe de chaque point majuscule, exemple : a l'affixe de A.

A) On considère la figure suivante. O est le centre du repère et C le milieu de $[AB]$. Enfin, les deux triangles OAA' et OBB' sont isocèles et rectangles en O. Alors :



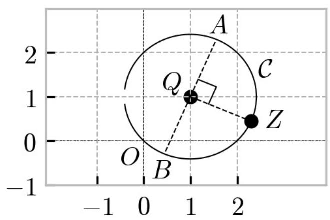
a	$b'+\mathrm{i}b=0$ et $a'+\mathrm{i}a=0$
b	$c-a=c-b$
c	$\dfrac{a'-b'}{c}=-2\mathrm{i}$
d	$B'A'=2\,OC$ et $(A'B')\perp(OC)$

B) On considère la figure suivante.
B est le milieu de $[CA]$ et $(OB)\perp(CA)$. O est le centre du repère.
a est imaginaire pur et c est réel. Alors :



a	$\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}\right)$ peut être égal à $\frac{\pi}{3}$.
b	l'aire de AOC est $\left\lvert\frac{a}{\sqrt{2}}\times\frac{c}{\sqrt{2}}\right\rvert$
c	$b=\dfrac{a-c}{2}$
d	$\lvert a-c\rvert=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\lvert c\rvert$

C) On considère la figure suivante.
Z est un point quelconque du cercle $\mathcal{C}$. On suppose que Z n'est pas sur l'axe des réels. Alors :



a	le point Z' d'affixe $\bar{z}$ peut se trouver sur $\mathcal{C}$
b	l'angle $\left(\overrightarrow{ZO},\overrightarrow{ZA}\right)$ mesure $\frac{\pi}{4}$
c	On peut avoir $b=0$
d	le point Z'' d'affixe $-\bar{z}$ peut se trouver sur $\mathcal{C}$

Chapitre 10

Corrigés - Complexes

1 Révisions immédiates du cours

A) **Réponse b** : $\boxed{\mathrm{i}\sqrt{18}}$

$3\mathrm{i}\sqrt{2}=\sqrt{9}\mathrm{i}\sqrt{2}=\mathrm{i}\sqrt{18}$.

B) **Réponse c** : $\boxed{5}$

$|w|=|-4-3\mathrm{i}|=|4+3\mathrm{i}|=\sqrt{16+9}=5$.

C) **Réponse a** : $\boxed{\dfrac{-\pi}{3}}$

$a=\sqrt{3}-3\mathrm{i}$ alors $|a|=\left|\sqrt{3}-3\mathrm{i}\right|=\sqrt{3+9}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$,

donc $a=2\sqrt{3}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}-\dfrac{3\mathrm{i}}{2\sqrt{3}}\right)=2\sqrt{3}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right)=2\sqrt{3}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

D) **Réponse a** : $\boxed{0}$

L'argument de $b=\mathrm{e}^{-3}$ est 0 car c'est un réel positif.

E) **Réponse b** : $\boxed{k-|f|^2}$

On pose $k=5-2\mathrm{i}$ et $f=1-2\mathrm{i}$. Alors :

a est fausse, car $k-f^2=5-2\mathrm{i}-(1-2\mathrm{i})^2=5-2\mathrm{i}-(1-4-4\mathrm{i})=8+2\mathrm{i}$ n'est pas imaginaire pur.

b est juste, car $k-|f|^2=5-2\mathrm{i}-(1+4)=-2\mathrm{i}$ est un imaginaire pur.

c est fausse car $|k-f|^2=|4|^2=16$ est un réel.

d est fausse, car $|k|-|f|^2=\sqrt{25+4}-(1+4)=\sqrt{29}-5$ est un réel.

F) **Réponse b** : $\boxed{j=\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}} \text{ est une solution de } (E)}$

L'équation (E) $z^2+z+1=0$ se résout en calculant d'abord $\Delta=1-4=-3<0$ d'où deux solutions conjuguées $z=\dfrac{-1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$ et $\bar{z}=\dfrac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$ donc la réponse d) est fausse.

La réponse a ne peut pas être juste car dans $\mathbb{C}$ toutes les équations du second degré ont deux solutions (éventuellement confondues).

c est fausse, car cela voudrait dire que $\Delta=0$.

C'est donc la réponse **b** par élimination. Effectivement, $\dfrac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}=\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}$.

G) **Réponse d** : $\boxed{\text{l'antécédent de } -2\mathrm{i} \text{ par } f \text{ est } \dfrac{\mathrm{i}}{2}}$

a est fausse, car $f(-3\mathrm{i})=2(-3\mathrm{i})-3\mathrm{i}=-6\mathrm{i}-3\mathrm{i}=-9\mathrm{i}\neq-3\mathrm{i}$.

b est fausse, car $f(z)=0\Leftrightarrow 2z-3\mathrm{i}=0\Leftrightarrow z=\dfrac{3\mathrm{i}}{2}$: une seule solution.

Remarque : une équation de degré 1 de type $az+b=0$ admet (sauf si $a=0$) une et une seule solution, qu'on soit dans $\mathbb{C}$ ou dans $\mathbb{R}$.

c est fausse, car le conjugué de $f(z)$ n'est pas $2z+3\mathrm{i}$ mais $2\bar{z}-3\mathrm{i}$.

d est juste : on résoud $f(z)=-2\mathrm{i}\Leftrightarrow 2z-3\mathrm{i}=-2\mathrm{i}\Leftrightarrow 2z=\mathrm{i}\Leftrightarrow z=\dfrac{\mathrm{i}}{2}$.

H) **Réponse a** : $\boxed{j+j^2=-1}$

On pose $j=\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}$ alors $j=-\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\bar{j}=j^2=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}}=\mathrm{e}^{-\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$ d'où b est fausse.

c est fausse, car cela équivaut à $j=(1-j)^2\Leftrightarrow j=1-2j+j^2\Leftrightarrow 1-j+j^2=0$.

Or, $1-j+j^2=1-\mathrm{i}\sqrt{3}\neq 0$.

I) **Réponse d** : $\boxed{t^2 = 8e^{-\frac{i\pi}{6}}}$

$t = 2(1+i)e^{-i\frac{\pi}{3}} = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}e^{-i\frac{\pi}{3}} = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{12}}$ d'où $|t| = 2\sqrt{2}$ et $\arg t = -i\frac{\pi}{12}$: les réponses a et b sont fausses.

c est fausse, car (en passant en cartésiennes) : $t = (2+2i)\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + i - i\sqrt{3} + \sqrt{3}$.

Vérifions la d : $t = 2\sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{12}}$ donc $t^2 = (2\sqrt{2})^2 e^{-i\frac{\pi}{12}\times 2} = 8e^{-\frac{i\pi}{6}}$, c'est bien la bonne réponse.

J) **Réponse d** : $\boxed{\text{le cercle de centre } U \text{ et de rayon } 2}$

En effet, $|z-2| = 2 \Leftrightarrow ZU = 2$.

K) **Réponse c** : $\boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

Question piège : on ne peut pas appliquer Moivre. On a :

$$\left|\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right| = \sqrt{\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

2 Premières applications

A) **Réponse b** : $\boxed{H \text{ et } M \text{ sont symétriques par rapport à l'axe vertical}}$

On a $h = 3e^{\frac{i\pi}{8}}$ et $m = -3e^{-\frac{i\pi}{8}}$ donc $m = -\bar{h}$. Autrement dit, m et h ont la même partie imaginaire mais des parties réelles opposées. Ainsi, H et M sont symétriques par rapport à l'axe vertical.

B) **Réponse d** : $\boxed{\text{un imaginaire pur de la forme } ik \text{ avec } k > 0}$

$h + m = 6i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$, $h + m$ est un imaginaire pur de partie imaginaire strictement positive.

C) **Réponse a** : $\boxed{(\sqrt{2})^{27}e^{-\frac{i\pi}{4}}}$

Il faut passer en mode exponentiel :

$d = 2 - 2i = 2\sqrt{2}\,e^{-\frac{i\pi}{4}}$ donc $d^9 = \left(2\sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{4}}\right)^9 = (2\sqrt{2})^9 e^{-\frac{9i\pi}{4}} = (\sqrt{2})^{27}e^{-\frac{9i\pi}{4}}$ et $-\frac{9\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} - 2\pi$.

Les réponses b et d sont fausses forcément car $(\sqrt{2})^{27}$ ne saurait être un nombre entier puisque 27 est impair.

D) **Réponse c** : $\boxed{-\frac{2\pi}{3}}$

Là aussi il faut utiliser la forme exponentielle : $|g| = \left|2i\sqrt{6} - 2\sqrt{2}\right| = \sqrt{24+8} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$, on trouve ensuite $\arg(g) = \frac{2\pi}{3}$ d'où $\arg(g^5) = \frac{2\pi}{3} \times 5 = \frac{10\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3}(2\pi)$.

E) **Réponse a** : $\boxed{\text{l'axe des ordonnées}}$

$|z-2| = |z+2| \Leftrightarrow ZU = ZV$ c'est l'équation de la médiatrice de $[UV]$ c'est donc l'axe vertical.

F) **Réponse b** : $\boxed{\frac{\bar{z}}{z}}$

Il faut connaître la relation $|z|^2 = z\,\bar{z}$. Ainsi $\left(\frac{z}{|z|}\right)^2 = \frac{z^2}{|z|^2} = \frac{z^2}{z\,\bar{z}} = \frac{z}{\bar{z}}$.

a est fausse, car pour tout z non réel $\frac{z}{\bar{z}} \neq 1$.

b est juste, car $\left(\frac{|z|}{z}\right)^2 = \frac{|z|^2}{z^2} = \frac{z \times \bar{z}}{z^2} = \frac{\bar{z}}{z}$.

c est fausse, car $\left(\frac{\bar{z}}{|z|}\right)^2 = \left(\frac{z}{|z|}\right)^2 \Leftrightarrow (\bar{z})^2 = z^2 \Leftrightarrow \left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^2 = 1$. Posons $Z = \frac{z}{\bar{z}}$, l'équation s'écrit donc $Z^2 = 1 \Leftrightarrow Z \in \{-1; 1\}$. On aurait donc $\frac{\bar{z}}{z} = 1$ ou $\frac{\bar{z}}{z} = -1$ soit $\bar{z} = z$ ou $\bar{z} = -z$ soit z réel ou z imaginaire pur. L'expression proposée en c n'est donc pas vraie dans le cas général.

Enfin, d est fausse car c'est l'argument de $\left(\frac{z}{|z|}\right)^2$ qui est égal à $2 \times \arg(z)$ et non le nombre $\left(\frac{z}{|z|}\right)^2$ lui-même.

3 Questions de logique

A) **Réponse d** : $\boxed{\text{il existe un } \theta \in \mathbb{R} \text{ tel que } z - 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = 0}$
a et b sont fausses, car une information sur le module ne peut rien présager de l'argument.
c est fausse, car équivalente à $z = 2$, or on peut avoir $|z| = 2$ sans avoir $z = 2$.
d est juste, car elle donne l'équation paramétrique du cercle de centre O et de rayon 2, tandis que $|z| = 2$ est l'équation cartésienne de ce même cercle.

B) **Réponse b** : $\boxed{z \neq 1 + \mathrm{i}}$
a est fausse, car il y a une infinité d'arguments possibles en dehors de $\dfrac{\pi}{4}$.
b est juste, car $z = 1 + \mathrm{i} \Rightarrow \arg(z) = \dfrac{\pi}{4} (\operatorname{mod} 2\pi)$, donc sa contraposée est vraie.
c est fausse : contre exemple $z = 1$, ou n'importe quel $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec $\theta \neq \dfrac{\pi}{4}$.
d est fausse, car on peut prendre $z = \mathrm{e}^{-\frac{3\mathrm{i}\pi}{4}}$.

C) **Réponse d** : $\boxed{|z| \leqslant 5 \Rightarrow \Im(z) = 0}$
a est fausse, car $\Im(z) = 5$ et $\Re(z - 2) \geqslant 3$ impliquent seulement $z = a + 5\mathrm{i}$ avec $a \geqslant 5$ et pas forcément $a = 5$.
b est fausse, car $\Re(z) \leqslant 5$ et $\Re(z - 2) \geqslant 3$ impliquent certes $\Re(z) = 5$ mais aucune contrainte sur $\Im(z)$.
c est fausse, car aucun argument ne peut être égal à la fois à $\dfrac{2\pi}{3}$ et à $-\dfrac{\pi}{3}$.
d est juste, car pour tout complexe z on a $|z| \geqslant |\Re(z)|$, donc $|z| \leqslant 5$ et $\Re(z) \geqslant 5$ impliquent $|z| = \Re(z) = 5$ donc $\Im(z) = 0$.

D) **Réponse b** : $\boxed{\text{tout complexe non nul admet deux racines carrées opposées}}$
a est fausse, car $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ et $\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ ont pour carré i et ne sont pas conjugués.
b est juste, car si $z = R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec $R > 0$ et si $y^2 = z$ avec $y = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$ et $r > 0$ alors $r = \sqrt{R}$: une seule valeur possible pour r, et $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha})^2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \Leftrightarrow 2\alpha = \theta + 2k\pi \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{\theta}{2} + k\pi$: deux valeurs définies à π près. Ainsi, z possède deux racines carrées d'arguments congrus modulo π, c'est-à-dire deux racines carrées opposées.

4 Questions en tableau

A) **Réponse a**
L'équation $\arg(z) = \dfrac{\pi}{4} (\operatorname{mod} 2\pi)$ correspond en effet à la demi-droite partant de O et d'équation $x = y$ pour $x, y \geqslant 0$.
b aurait une équation du type $x + y = C^{\text{ste}}$ avec $x, y \geqslant 0$.
c contient un seul point.
d aurait pour équation $|z| = C^{\text{ste}}$ et $0 \leqslant \arg(z) \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.

B) **Réponse a** : $\boxed{\begin{cases} \arg(z) = \dfrac{3\pi}{4} \\ 1 < |z| < 2 \end{cases}}$
En effet, les deux cercles en pointillés ont pour rayons respectifs 1 et 2, et les points B et C ont pour argument $\dfrac{3\pi}{4} (\operatorname{mod} 2\pi)$.

C) **Réponse a**
L'équation $\arg(z - 1 - \mathrm{i}) = \dfrac{\pi}{2} (\operatorname{mod} 2\pi)$ correspond au lieu a.

D) **Réponse c**
L'équation $z^2 \in [-4; -1]$ veut dire $z^2 = m\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i} + 2k\pi}, m \in [1; 4]$ équivalente à : $z = \sqrt{m}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2} + k\pi}, m \in [1; 4]$.
Soit, $z = m'\mathrm{i}$ ou $-m'\mathrm{i}$, $m' \in [1; 2]$.

E) **Réponse a**
a est juste : $y = -4\mathrm{i}$ et $z = 2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}$ donc $z^2 = 4\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/2} = -4\mathrm{i}$.
b est fausse : $z = -4\mathrm{i}$ donc $z^2 = -16 \neq y = 2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}$.
c est fausse : $z = -2\mathrm{i}$ donc $z^2 = -4$ or $y = -4\mathrm{i}$.
d est fausse : $z = -4\mathrm{i}$ donc $z^2 = -16$ or $y = -2\mathrm{i}$.

F) **Réponse d** : $\boxed{\text{la suite } (z^n) \text{ avec } z=1+\mathrm{i}}$

a est fausse, car la suite $\begin{cases} z_{n+1}=z_n-2z_{n-1}+2\mathrm{i} \\ z_0=1+\mathrm{i} \\ z_1=2\mathrm{i} \end{cases}$ donne : $z_2=z_1-2z_0+2\mathrm{i}=2\mathrm{i}-2(1+\mathrm{i})+2\mathrm{i}=2\mathrm{i}-2$ puis, $z_3=z_2-2z_1+2\mathrm{i}=2\mathrm{i}-2-2(2\mathrm{i})+2\mathrm{i}=-2$.

b est fausse, car la suite $\left(a_n=\left(\sqrt{2}\right)^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\frac{\pi}{2}}\right)$ a pour premier terme $a_0=\mathrm{i}\sqrt{2}$.

c est fausse, car la suite $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\frac{\pi}{4}}\right)$ avec $n\in\mathbb{N}$ ne donne que des réels de module 1.

d est juste, car la suite (z^n) avec $n\in\mathbb{N}^*$ et $z=1+\mathrm{i}$ donne $1+\mathrm{i}, 2\mathrm{i}, 2\mathrm{i}-2, -4, -4-4\mathrm{i}$...
Vu autrement, comme $1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$, cette suite montre des points qui tournent de $\frac{\pi}{4}$ à chaque étape, tout en s'éloignant progressivement de O, donnant l'impression d'une sorte de spirale.

5 Questions Vrai/Faux

Note : La formule dite du « grand Z » est en bordure de programme ; on s'en servira souvent ici :

$$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right)=\arg\frac{d-c}{b-a}=\arg(d-c)(\overline{b-a})$$

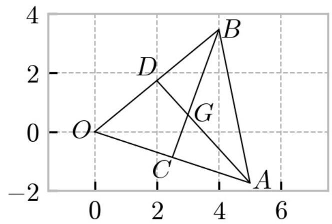


Figure 10.1. figure des questions A,B,C,D

A) $\boxed{}\boxed{\textbf{F}}$

Certes, $OA^2=\left|5-\mathrm{i}\sqrt{3}\right|^2=28$ et $\left|3\sqrt{3}+\mathrm{i}\right|^2=28$ aussi.

Toutefois, $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)=\arg\frac{b}{a}=\arg\frac{3\sqrt{3}+\mathrm{i}}{5-\mathrm{i}\sqrt{3}}=\arg\left(3\sqrt{3}+\mathrm{i}\right)\left(5+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)=\arg\left(14\sqrt{3}+14\mathrm{i}\right)=\frac{\pi}{6}$.

B) $\boxed{\textbf{V}}\boxed{}$

Vrai car on a $d=\frac{1}{2}b$.

C) $\boxed{\textbf{V}}\boxed{}$

C est le milieu de $[OA]$ par hypothèse et d'autre part $d-c=\frac{1}{2}(b-a)$ nous montre, puisque $c=\frac{a}{2}$, que tout simplement $d=\frac{b}{2}$ donc D est le milieu de $[OB]$. Ainsi, G est l'intersection des médianes de OAB donc le centre de gravité de ce triangle.

D) $\boxed{\textbf{V}}\boxed{}$

G étant le centre de gravité de OAB (voir question précédente), on en déduit que (OG) est la troisième médiane de OAB, or dans un triangle équilatéral, les médianes sont aussi hauteurs.

Remarque : un calcul simple donne : $b=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}a=\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(5-\mathrm{i}\sqrt{3}\right)=4+2\mathrm{i}\sqrt{3}$.

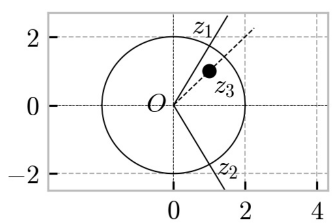


Figure 10.2. figure des questions E,F,G,H

E) | V | |

$z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z_2 = \overline{z_1} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$ et $z_3 = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

$$\left|\frac{\left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^8 \times \left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^9}{\left(2e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^{11}}\right| = \frac{(\sqrt{2})^8 \times (2)^9}{(2)^{11}} = \frac{2^4\, 2^9}{2^{11}} = 2^2 = 4.$$

F) | V | |

$$\frac{\left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^4 \times \left(2e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^7}{\left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^6} = \frac{2^4 \times 2^7}{2^3} \times e^{i\left(\frac{4\pi}{3} - \frac{7\pi}{3} - \frac{6\pi}{3}\right)} = 2^8 e^{-\frac{5i\pi}{2}} = -i \times 2^8.$$

G) | V | |

Il faut passer en forme cartésienne : $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_3 = 1 + i$ donc :

$$\begin{aligned}(z_1 - z_3)^4 &= \left(1 + i\sqrt{3} - 1 - i\right)^4 = \left(i\left(\sqrt{3} - 1\right)\right)^4 = \left(\sqrt{3} - 1\right)^4 = \left(3 + 1 - 2\sqrt{3}\right)^2 \\ &= \left(4 - 2\sqrt{3}\right)^2 = 2^2\left(2 - \sqrt{3}\right)^2 = 4\left(4 + 3 - 4\sqrt{3}\right) = 28 - 16\sqrt{3}\end{aligned}$$

d'où : $(z_1 - z_3)^4 = 28 - 16\sqrt{3}$.

H) | | F |

L'ensemble des points Z dont l'affixe z vérifie $\arg(z) = \arg(z_3) (\bmod 2\pi)$ est la demi-droite d'équation $\arg(z) = \frac{\pi}{4} (\bmod 2\pi)$.

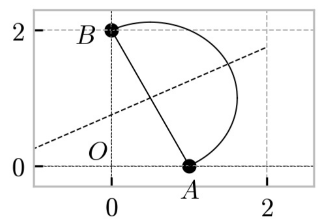


Figure 10.3. figure des questions I,J,K,L

I) | | F |

Faux, c'est la médiatrice de $[AB]$.

J) | | F |

Faux car (F) est un demi-cercle. Pour le cercle il aurait fallu avoir $\frac{\pi}{2} (\bmod \pi)$.

K) | V | |

• $AC = [c - a] = \left|-\frac{1}{2} + \frac{i}{2} - 1\right| = \left|-\frac{3}{2} + \frac{i}{2}\right| = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}$

et $BC = |c - b| = \left|-\frac{1}{2} + \frac{i}{2} - 2i\right| = \left|-\frac{1}{2} - \frac{3i}{2}\right| = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}$ donc $C \in (E)$.

• $\arg\left(\frac{c - 2i}{c - 1}\right) = \arg\left(\frac{-\frac{1}{2} + \frac{i}{2} - 2i}{-\frac{1}{2} + \frac{i}{2} - 1}\right) = \arg\left(\frac{-\frac{1}{2} - \frac{3i}{2}}{-\frac{3}{2} + \frac{i}{2}}\right) = \arg\left(\frac{-1 - 3i}{-3 + i}\right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2}$.

Donc, le point C appartient également à (F).

L) | | F |

Faux, car alors l'énoncé aurait indiqué $\arg\left(\dfrac{z-2\mathrm{i}}{z-1}\right)=\dfrac{\pi}{2}(\mathrm{mod}\,\pi)$ au lieu de $\arg\left(\dfrac{z-2\mathrm{i}}{z-1}\right)=\dfrac{\pi}{2}(\mathrm{mod}\,2\pi)$.

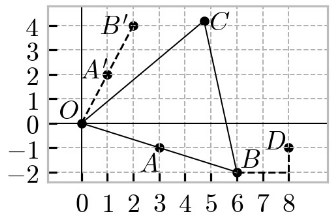


Figure 10.4. Exemple de figure pour les questions M,N,O,P

M) | V | |

On nous demande si $|b'-b|=2|a'-a|$. Or, $|b'-b|=|2a'-2a|=2|a'-a|$ donc la réponse est oui. En fait, (AA') est la droite des milieux du triangle OBB'.

N) | V | |

Vrai car $OB=|b|=|c|=OC$ d'une part, et l'angle $(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC})=\arg\dfrac{c}{b}=\arg \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}=\dfrac{\pi}{3}$.

O) | V | |

Vrai car on a $b=2a$ et $d=b+2+\mathrm{i}$ donc la question revient à demander si l'on peut avoir $a=2a+2+\mathrm{i}$ ce qui se simplifie en $-a=2+\mathrm{i}\Leftrightarrow a=-2-\mathrm{i}$: pour cette valeur-là, on a bien $A=D$.

P) | | F |

On veut $b+2+\mathrm{i}=b$, ce qui constitue clairement une équation sans solution.

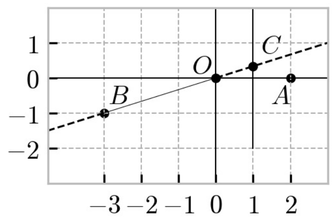


Figure 10.5. figure des questions Q,R,S,T.

Q) | V | |

Vrai car (E_1) s'écrit $|z|=|z-2|\Leftrightarrow OM=OA$.

R) | | F |

Faux car l'équation de (E_2) s'écrit $\arg(z-0)=\arg(z-b)$ ce qui signifie que $\overrightarrow{OZ}$ et $\overrightarrow{BZ}$ sont colinéaires et de même sens, donc la réponse est la droite (OB) privée de 0, de B, et du segment $[OB]$ (en pointillés sur la figure 5).

S) | V | |

Vrai car C (qui par définition est sur (OB) et sur la médiatrice de $[OA]$) est bien en dehors du segment $[OB]$ puisque $x_C=1>0$.

T) | **V** | |

En effet, l'équation de (OB) est $y=\dfrac{x}{3}$ et l'abscisse de C est 1 donc son ordonnée est $\dfrac{1}{3}$.

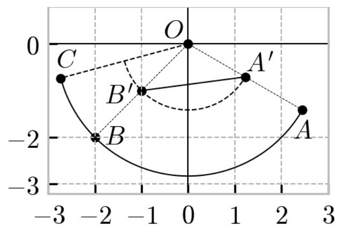


Figure 10.6. figure des questions U,V,W,X.

U) | **V** | |

$c=\dfrac{ab}{2\sqrt{2}}$ peut aussi s'écrire :

$c=a\dfrac{b}{2\sqrt{2}}=a\dfrac{-2-2\mathrm{i}}{2\sqrt{2}}=a\dfrac{-1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}}=a\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=a\mathrm{e}^{-\frac{3\mathrm{i}\pi}{4}}$, ainsi $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}\right)=\dfrac{c}{a}=\mathrm{e}^{-\frac{3\mathrm{i}\pi}{4}}$.

V) | **V** | |

$c=\dfrac{ab}{2\sqrt{2}}$ peut aussi s'écrire $c=b\dfrac{a}{2\sqrt{2}}=b\dfrac{\sqrt{6}-\mathrm{i}\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=b\dfrac{\sqrt{3}-\mathrm{i}}{2}=b\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$, ainsi $\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\right)=\dfrac{c}{b}=\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{6}}$.

W) | **V** | |

En effet, $\dfrac{a}{|a|}$ et $\dfrac{b}{|b|}$ sont les affixes de deux points du cercle trigo (points A' et B'), dont une corde ne saurait mesurer plus qu'un diamètre soit 2.

X) | | **F** |

L'argument de $\dfrac{a}{\bar{a}}\times\dfrac{b}{\bar{b}}$ est le double de celui de ab.

L'argument de ab est $\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)+\left(\dfrac{5\pi}{4}\right)=\dfrac{13\pi}{12}$ donc celui de $\dfrac{a}{\bar{a}}\times\dfrac{b}{\bar{b}}$ est $\dfrac{13\pi}{6}$, c'est-à-dire $\dfrac{\pi}{6}$.

D'un autre coté, $\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{2}=-\dfrac{\pi}{6}$.

L'argument de $\dfrac{a}{\bar{a}}\times\dfrac{b}{\bar{b}}$ n'est donc pas égal à $\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{2}$ mais en est l'opposé.

6 Questions ++

A) **Réponse d** : $\boxed{(E) \text{ possède trois solutions}}$

a est fausse, car cette équation n'est pas une équation polynomiale de dégré 2 vu qu'il y a un $\bar{z}$.

b est fausse. En effet :

z solution de $(E)\Leftrightarrow(i+\mathrm{i}y)^2-2(x-\mathrm{i}y)+1=0\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-y^2-2x+1=0\\2xy+2y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-1)^2-y^2=0\\y(x+1)=0\end{cases}$,

il manquait la seconde ligne.

Ce système aboutit à $\begin{cases}x-1=y\\y(x+1)=0\end{cases}$ ou $\begin{cases}x-1=-y\\y(x+1)=0\end{cases}$.

On trouve, en considérant les deux facteurs du bas :

- $y=0$ et donc $x=1$: le nombre complexe $z=1$;
- $x+1=0\Leftrightarrow x=-1$ et soit $y=-2$ soit $y=2$.

Ainsi, $S=\{1;-1-2\mathrm{i};-1+2\mathrm{i}\}$: réponse **d**.

c est fausse, car ce ne sont pas les deux uniques solutions puisque l'on trouvait aussi $z=1$.

B) **Réponse** b : $\boxed{\begin{array}{c}\text{l'ensemble des points } Z \text{ tels que } z' \in \mathbb{R} \text{ est} \\ \text{l'axe des abscisses, éventuellement privé d'un point}\end{array}}$

a est fausse : on résoud $z' = z \Leftrightarrow \dfrac{2z+1}{z-1} = z \Leftrightarrow 2z+1 = z^2 - z \Leftrightarrow z^2 - 3z - 1 = 0$.
On calcule $\Delta = 9 + 4 = 13$ donc les deux points invariants sont deux points d'affixes réelles :

$$z_1 = \frac{3-\sqrt{13}}{2} \text{ et } z_2 = \frac{3+\sqrt{13}}{2}.$$

Ces deux nombres ne sont pas opposés.
b est juste : Posons $a = -\dfrac{1}{2}$ et $b = 1$ alors, en remarquant que $2z+1 = 2\left(z - \left(-\dfrac{1}{2}\right)\right)$, $z' \in \mathbb{R}$ s'écrit aussi $\dfrac{z-a}{z-b}$, et donc z' réel $\Leftrightarrow \dfrac{z-a}{z-b}$ réel $\Leftrightarrow \begin{cases} (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}) = 0 \,(\text{mod}\, \pi) \\ \text{ou } z = a \end{cases}$.
Ceci équivaut encore à $M = A$ ou A, M, B alignés. Et la droite (AB) n'est autre que l'axe des abscisses. L'ensemble des Z tels que $z' \in \mathbb{R}$ est donc bien l'axe des abscisses éventuellement privé d'un point.
c est fausse car $|z'| = 2 \Leftrightarrow \left|\dfrac{2z+1}{z-1}\right| = 2 \Leftrightarrow 2\left|\dfrac{z-a}{z-b}\right| = 2 \Leftrightarrow |z-a| = |z-b| \Leftrightarrow MA = MB$: ceci est l'équation de la médiatrice de $[AB]$ et pas du tout un cercle.
d est fausse : 2 n'a pas d'antécédent car $z' = 2 \Leftrightarrow \dfrac{2z+1}{z-1} = 2 \Leftrightarrow 2z+1 = 2z-2 \Leftrightarrow 1 = -2$: impossible.

Remarque : il faut savoir que les fonctions $m \mapsto \dfrac{am+b}{cm+d}$ (avec $c \neq 0$) ont toujours une valeur interdite ($m = -\dfrac{d}{c}$ n'a pas d'image) et un antécédent impossible ($m = \dfrac{a}{c}$ n'a pas d'antécédent, penser aux limites en $+\infty$ lorsque m est réel).

C) **Réponse** d : $\boxed{\text{si } Z' \text{ est sur l'axe des ordonnées, alors } Z \text{ est sur le cercle de diamètre } [OA]}$

a est fausse, car $z' = \dfrac{z}{z+\mathrm{i}} = \dfrac{z-0}{z-a}$, donc cela implique, en passant au module : $OZ' = \dfrac{OZ}{AZ}$. Or, bien sûr, OZ n'est pas forcément égal à 1.
b est fausse. En effet, en passant à l'argument dans $z' = \dfrac{z-0}{z-a}$, on trouve $\arg(z'-0) = \arg\dfrac{z-0}{z-a}$, ce qui s'écrit en terme d'angles : $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OZ'}\right) = \left(\overrightarrow{AZ}, \overrightarrow{OZ}\right)$ soit l'opposé de ce que b propose.
c est fausse. En effet, que Z' soit un point du cercle de centre O et de rayon 1, cela se traduit par $OZ' = 1$ soit $\dfrac{OZ}{AZ} = 1 \Leftrightarrow OZ = AZ$ ce qui veut dire que Z est sur la médiatrice de $[OA]$, or celle-ci est parallèle à l'axe des abscisses et non pas à l'axe des ordonnées.

d est juste, car s Z' est sur l'axe des ordonnées, alors $\begin{cases} Z' = O \\ \text{ou} \\ \left(\vec{u}, \overrightarrow{OZ'}\right) = \dfrac{\pi}{2} \,(\text{mod}\, \pi) \end{cases}$.

Cela implique : $\begin{cases} Z = O \\ \text{ou} \\ (\overrightarrow{AZ}, \overrightarrow{OZ}) = \dfrac{\pi}{2} \,(\text{mod}\, \pi) \end{cases}$, d'où : Z est sur le cercle de diamètre $[AB]$.

D) **Réponse** b : $\boxed{Z \text{ et } Z\text{' peuvent être symétriques par rapport à l'axe des ordonnées}}$

On traduit l'énoncé : $z \neq 0$ et $z' = \overline{-z^2}$. On pose $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.
a est fausse, car $z' = z \Leftrightarrow -(\bar{z})^2 = z$. Or, si l'on passe en exponentielle, cela donne :

$$-(\bar{z})^2 = z \Leftrightarrow -r^2\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\theta} = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \Leftrightarrow r^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-2\theta+\pi)} = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \Leftrightarrow \begin{cases} r^2 = r \\ \text{et} \\ \theta = \pi - 2\theta (\text{mod}\, 2\pi) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 1 \\ \text{et} \\ 3\theta = \pi \,(\text{mod}\, 2\pi) \end{cases}.$$

La condition $3\theta = \pi (\text{mod}\, 2\pi)$ entraîne, en divisant par 3 : $\theta = \dfrac{\pi}{3}\left(\text{mod}\, \dfrac{2\pi}{3}\right)$ d'où $z' = z$ pour seulement trois complexes : $\left\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}; -1; \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right\}$, ce qui ne correspond pas à ce a propose.
b est juste, car z et z' sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées ssi :
$z' = -\bar{z} \Leftrightarrow -r^2\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\theta} = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-\theta+\pi)} \Leftrightarrow r^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-2\theta+\pi)} = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-\theta+\pi)}$.

Ceci équivaut à $\begin{cases} r^2 = r \\ \text{et} \\ -\theta + \pi = \pi - 2\theta \,(\text{mod}\, 2\pi) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 1 \\ \text{et} \\ \theta = 0 \,(\text{mod}\, 2\pi) \end{cases} \Leftrightarrow z = 1$ donc cette réponse est vraie.

c est fausse, car z et z' sont conjugués si et seulement si :

$$z' = \bar{z} \Leftrightarrow -r^2\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\theta} = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-\theta)} \Leftrightarrow r^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-2\theta+\pi)} = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-\theta)} \Leftrightarrow \begin{cases} r^2 = r \\ \text{et} \\ -\theta = \pi - 2\theta \,(\text{mod}\, 2\pi) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 1 \\ \text{et} \\ \theta = \pi \,(\text{mod}\, 2\pi). \end{cases}$$

d est fausse : d'un côté, « z réel » équivaut à $\theta = 0 \bmod (\pi)$; de l'autre, « z' imaginaire pur » équivaut à :
$-2\theta = \frac{\pi}{2} \,(\mathrm{mod}\,\pi) \Leftrightarrow 2\theta = \frac{\pi}{2}\,(\mathrm{mod}\,2\pi) \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}\left(\mathrm{mod}\,\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \theta\,(\mathrm{mod}\,2\pi) \in \left\{\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right\}$.

E) **Réponse d** : $\boxed{\text{il y a une et une seule position de } Z \text{ telle que } z = 2d}$
a est fausse, car on peut avoir $ZO = 0$ c'est-à-dire $Z = 0$.
b est fausse, car car D est le centre du cercle (de rayon non nul) sur lequel se trouve Z.
c est fausse, car la verticale passant par D coupe le cercle de centre D en deux points.
d est juste : il s'agit du symétrique de O par rapport à D qui a pour affixe $2d$ et se trouve sur le cercle $\mathcal{C}$.

F) **Réponse b** : $\boxed{\text{l'un des points } G, U, D, C \text{ est sur le cercle de diamètre } [AB]}$
Cet exercice est un piège pour s'entraîner à bien lire. La réponse **b** est évidente car C est sur le cercle de diamètre $[AB]$ puisque ABC est rectangle en C.
Pour info, voici les calculs des autres :
a : $d = (a^2b - ab^2)^2 = (ab(a-b))^2 = ((5+2\mathrm{i})(-1+\mathrm{i})(5+2\mathrm{i}-(-1+\mathrm{i})))^2 = ((-7+3\mathrm{i})(6+\mathrm{i}))^2$
$= (-45+11\mathrm{i})^2 = 45^2 - 11^2 - 22 \times 45\mathrm{i}$: d n'est pas imaginaire pur.
c : $g = \frac{5+2\mathrm{i}}{-1+\mathrm{i}} = \frac{(5+2\mathrm{i})(-1+\mathrm{i})}{2} = \frac{-7+3\mathrm{i}}{2}$ n'a pas pour argument $-\frac{\pi}{6}$.
d : Si W est le milieu de $[DG]$ alors :
$w = \frac{\frac{-7+3\mathrm{i}}{2} + 45^2 - 11^2 - 22 \times 45\mathrm{i}}{2} = \frac{-7 + 2\times 45^2 - 2 \times 11^2}{4} + \mathrm{i}\left(\frac{3}{4} - 11 \times 45\right)$ n'est pas égal à $4 - \mathrm{i}$.

7 QCM alternatifs (de 0 à 4 réponses justes)

A) $\boldsymbol{\beta}$ **et** $\boldsymbol{\delta}$ sont justes.
α est fausse, car $|\mathrm{i}| = 1$ et $\arg(\mathrm{i}) = \frac{\pi}{2}$.
$\boldsymbol{\beta}$ est juste, car $\frac{\pi}{7} < 1$ et $8\frac{\pi}{7} = -6\frac{\pi}{7} + 2\pi$.
γ est fausse, car $\left|\mathrm{e}^{-\frac{3\mathrm{i}}{4}}\right| = 1$.
$\boldsymbol{\delta}$ est juste, car le module est $\frac{1}{2}$ et l'argument vaut $\frac{-2\pi}{3}$.

B) $\boldsymbol{\alpha}$ **et** $\boldsymbol{\delta}$ sont justes.
$\boldsymbol{\alpha}$ est juste, car $(1+\mathrm{i})^2 = 2\mathrm{i}$.
β est fausse, car $\left(\mathrm{e}^{\frac{9\mathrm{i}\pi}{8}}\right)^2 = \mathrm{e}^{\frac{9\mathrm{i}\pi}{4}} = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{4}}$.
γ est fausse, car $(-k)^2 = k^2$, réel.
$\boldsymbol{\delta}$ est juste, car $\left(\frac{1}{1-\mathrm{i}}\right)^2 = \frac{1}{-2\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{i}}{2}$.

C) $\boldsymbol{\beta}$ **et** $\boldsymbol{\gamma}$ sont justes.
En effet, la condition s'écrit $\mathrm{Re}(z) = \pm\mathrm{Im}(z)$.
α est fausse, car certes $\mathrm{Re}(0) = \mathrm{Im}(0) = 0$, cependant, ce n'est pas la seule possibilité.
$\boldsymbol{\beta}$ est juste, car $\mathrm{Re}(z) = \pm\mathrm{Im}(z)$ implique $z = k(\pm 1 \pm \mathrm{i})$.
$\boldsymbol{\gamma}$ est juste, car $z^2 = (\mathrm{Re}(z) + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z))^2 = \underbrace{\mathrm{Re}(z)^2 + (\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z))^2}_{0} + 2\mathrm{i}\,\mathrm{Re}(z)\mathrm{Im}(z) = 2\mathrm{i}\,\mathrm{Re}(z)\mathrm{Im}(z)$.
δ est fausse, car $z = 2 + 2\mathrm{i}$ vérifie la condition et n'a pas pour module 1.

D) $\boldsymbol{\beta}$ **et** $\boldsymbol{\delta}$ sont justes.
En effet, on a $\left(\overrightarrow{OT}, \overrightarrow{OK}\right) = \frac{\pi}{2}(2\pi)$ donc $\arg\frac{t}{k} = \frac{\pi}{2}\,(\mathrm{mod}\,2\pi)$ avec aussi $OT = OK \Leftrightarrow |t| = |k|$ d'où $\frac{t}{k} = \mathrm{i}$.
Ainsi, α est fausse et $\boldsymbol{\beta}$ est juste.
γ est fausse, car $OA = \sqrt{2}\,OK \Leftrightarrow |a| = \sqrt{2}\,|k|$, incompatible avec $a = \mathrm{i}\,k$.
$\boldsymbol{\delta}$ est juste, car $t = \mathrm{i}\,k$ entraîne, par passage au carré : $t^2 = -k^2$.

8 Familles, algo et récurrences

A) **Réponse a** : $\boxed{S_n \text{ est nul pour plusieurs valeurs de } n}$

a est juste car $1+j+j^2=0$ donc S_n nul dès que le nombre de termes de S_n est multiple de 3.

on pouvait aussi remarquer que $S_n=\dfrac{1-j^{n+1}}{1-j}$, qui est nul dès que $n+1$ multiple de 3 car $j^3=1$.

b est fausse : il manque le dénominateur.

c est fausse, car la partie réelle de $\left(-\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$ n'est pas $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$.

d est fausse, car contradictoire avec le a.

B) **Réponse a** : $\boxed{\text{la propriété } |u_n|>2 \text{ est héréditaire}}$

Cet exercice nécessite de prendre des exemples pour u_0 et de regarder ce qui se passe.
b est fausse : prendre $u_0=1,1\,\mathrm{i}$, on a alors $u_1=-1,21+1=-0,21$ donc $|u_0|$.
c est fausse : prendre $u_0=0,1$ alors $u_1=1,01$.
d est fausse : prendre $u_0=1,5$ ou $u_0=1+\mathrm{i}$.
a est donc juste par élimination. Pour le lecteur curieux, cela revient à montrer que si $r>2$ alors $|1+r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|>2$. Or, $|1+r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|^2=(1+r\cos\theta)^2+r^2\sin^2\theta$.
Ainsi, il s'agit de montrer que si $r>2$, alors $1+r^2+2\,r\cos(\theta)>4$.
Or, cela est vrai en vertu de l'inégalité $1+r^2+2\,r\cos(\theta)\geqslant 1+r^2+2r$.
En effet, $1+r^2+2r$ est toujours supérieur à 4 car cela revient à écrire $r^2+2r-3>0$ et, de fait, ce trinôme est positif dans $]-\infty;-3[\cup]1;+\infty[$ donc en particulier dans $]2;+\infty[$.

C) **Réponse d** : $\boxed{\texttt{-2*A1*B1}}$

En effet, si $a=x+\mathrm{i}\,y$ alors $\Im(\overline{a^2})=\Im(x^2-y^2-2\mathrm{i}\,x\,y)=-2\,x\,y$.
Le a donne $|a|^2$.
Le b donne $(\Im(a))^2$.
Le c donne $\Re(a^2)$.

D) **Réponse b** : $\boxed{z \text{ est imaginaire pur}}$

L'algorithme répète 10 fois l'instruction « z devient $1,1\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/20}\,z$ ».
a est fausse, car dès la deuxième itération on a $|z|\geqslant 1,1$ et ensuite $|z|$ ne fait que croître.
b est juste (et d fausse) car l'algorithme tourne exactement dix fois, et après la dixième itération on a :

$$z=\left(1,1\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{20}}\right)^{10}=1,1^{10}\times\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}=1,1^{10}\,\mathrm{i}.$$

c est fausse : on répète 10 fois.

9 Réflexion autour d'un thème mathématique

Thème : **l'argument**.

A) **Réponse c** : $\boxed{\text{possède toujours plusieurs arguments}}$

On ne doit jamais dire « l'argument de z » mais « **un** argument de z ». Car un argument est toujours un *représentant* de l'angle $\left(\vec{u},\overrightarrow{OM}\right)$ où $\vec{u}$ dirige l'axe des abscisses et M est le point d'affixe z.
Autrement dit, un argument est toujours défini à $2k\pi$ près.

B) **Réponse b** : $\boxed{\text{le point } Z \text{ d'affixe } z \text{ est forcément sur la droite d'équation } y=x}$

Il faut tout d'abord remarquer que $\dfrac{\pi}{4}\,(\mathrm{mod}\,\pi)$ signifie : $\dfrac{\pi}{4}\,(\mathrm{mod}\,2\pi)$ ou $-\dfrac{3\pi}{4}\,(\mathrm{mod}\,2\pi)$.

a est fausse, car $\arg(1-\mathrm{i})=-\dfrac{\pi}{4}\,(\mathrm{mod}\,2\pi)$.

b est juste, car la droite d'équation $y=x$ contient tous les points d'arguments $\dfrac{\pi}{4}\,(\mathrm{mod}\,2\pi)$ et tous les points d'argument $-\dfrac{3\pi}{4}\,(\mathrm{mod}\,2\pi)$ (et O aussi, qui n'a pas d'argument).

c est fausse, car l'argument de z^2 est le double de celui de z. On a $\arg(z)=\dfrac{\pi}{4}+k\pi$ d'après l'énoncé, et donc $\arg(z^2)=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$ en multipliant par 2.

d est fausse, car $\dfrac{7\pi}{4}=-\dfrac{\pi}{4}\,(\mathrm{mod}\,\pi)$.

C) **Réponse d** : $\boxed{A \text{ est sur la demi-droite } [BA')}$
Il faut bien comprendre que $\arg(a-b) = \arg(a'-b)$ signifie que les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BA'}$ sont de même sens, donc les trois points sont alignés soit dans l'ordre B, A, A' soit dans l'ordre B, A', A (donc ni a ni b ne peut être affirmé tout seul), autrement di les demi-droites $[BA)$ et $[BA')$ sont confondues (donc c est fausse).

D) **Réponse a** : $\boxed{\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CO}\right)}$
La formule dite du « grand Z » n'est plus dans les programmes officiels mais demeure incontournable :

$$\arg \frac{a-b}{c-d} = \left(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BA}\right).$$

Ici, il est demandé $\arg \dfrac{0-c}{c-b} = \left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CO}\right)$.

E) **Réponse b** : $\boxed{\arg\left(\dfrac{z-a}{z-b}\right) = -\dfrac{\pi}{2} (\operatorname{mod} 2\pi)}$
Se rappeler la propriété bien connue :
si M distinct de A et B, alors : ABM rectangle en $M \Leftrightarrow M$ sur le demi-cercle de diamètre $[AB]$.
a est fausse, car s'écrit : « $\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}$ de sens opposés » : c'est donc l'équation du segment $[AB]$.
b est juste, car s'écrit : $\left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}\right) = -\dfrac{\pi}{2} (\operatorname{mod} 2\pi)$.
c est fausse, car donnerait le cercle tout entier.
d est fausse, car signifie que $\overrightarrow{OM}$ colinéaire à $\overrightarrow{AB}$: c'est l'équation de la parallèle à (AB) passant par O.

F) **Réponse a** : $\boxed{« \dfrac{z-a}{z-b} \text{ réel négatif} »}$
Toutes les explications sont dans la réponse à l'exercice précédent.

10 Rédactions d'élèves imaginaires...

A) Réponses :

α)

	F

Faux, il faut remplacer « point M » par « complexe m » (mais l'idée est bonne).

β)

V	

γ)

V	

δ)

	F

Erreur de calcul c'est $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$, Karl a oublié le i^2.

B) Réponses :

α)

	F

On peut juste affirmer que le centre de ce cercle est sur la médiatrice de $[AB]$.

β)

	F

De même que deux points non confondus sont toujours alignés, de même trois points non alignés sont toujours cocycliques. Ici, A, B, Y ne sont clairement pas alignés, donc il existe un cercle passant par les trois.

γ)

	F

Rien à voir, « D sur le cercle de diamètre $[BC]$ » équivaut juste à « DBC rectangle en D », et pas du tout à « DBC isocèle en D ».

δ)

V	

$ABCD$ est effectivement un rectangle : on vérifie rapidement que $\dfrac{a+c}{2} = \dfrac{b+d}{2}$ (donc $ABCD$ est un parallélogramme) et $\overrightarrow{AB}(-2;-2) \cdot \overrightarrow{AD}(-3;3) = 0$ (donc ce parallélogramme est un rectangle).
Et effectivement, les quatre sommets d'un rectangle sont cocycliques (il suffit de prendre pour centre du cercle le centre du rectangle).

C) Réponses :

α) | **V** | |

C'est vrai mais pas très porteur de sens. En fait, le module du conjugué de z est égal au module de z : $|\bar{z}|=|z|$. Mais puisque le module est réel et que le conjugué d'un réel est lui-même, ce que dit Moustacha, formellement, est juste...

β) | **V** | |

On a toujours $|a+b| \leqslant |a|+|b|$ (inégalité triangulaire).

γ) | | **F** |

Exemple : prendre $z=-2$.

δ) | **V** | |

On a toujours $|ab|=|a| \times |b|$.

D) Réponses :

α) | | **F** |

Avec ce choix pour B, on aurait : $OA=\sqrt{5}=AB$ mais $OB=2$.

β) | | **F** |

On ne sait pas si $OA=OB$. De plus, BOA sera direct.

γ) | | **F** |

Faux, car $\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{3}}=\left(\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ (et non pas $-\frac{1}{2}$).

δ) | **V** | |

Vrai, car on aura alors $OA=OB$ et $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)=-\frac{\pi}{3}$.
Cette correspond à ce qu'on pourrait appeler une *rotation* d'angle $-\frac{\pi}{3}$ autour de 0.

11 Exercices avec graphiques

A) **Réponse d** : $\boxed{B'A'=2OC \text{ et } (A'B)\perp(OC)}$

a est fausse : certes, $b'=-\mathrm{i}b$ (rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$) donc $b'+\mathrm{i}b=0$. Mais $a'=\mathrm{i}a$ (rotation d'angle $+\frac{\pi}{2}$) donc $a'-\mathrm{i}a=0$.
b est fausse, car il faudrait écrire $c-a=-(c-b)$ correspondant à l'égalité vectorielle $\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{BC}$.
D'ailleurs, ceci équivaut à $c-a=-c+b \Leftrightarrow 2c=a+b \Leftrightarrow c=\frac{a+b}{2}$ (formule du milieu).
c est fausse. En effet, Réunissons les trois égalités (rectifiées !) précédentes : $\begin{cases} b'=-\mathrm{i}b \\ a'=\mathrm{i}a \\ 2c=a+b \end{cases}$.
On soustrait la ligne 1 à la ligne 2 : $a'-b'=2\mathrm{i}c=2\mathrm{i}(c-0)$, ce qui ne correspond pas à la réponse c.
d est juste : la relation $a'-b'=\mathrm{i}a+\mathrm{i}b=\mathrm{i}(a+b)=2\mathrm{i}c$ montre en effet, en prenant le module puis l'argument, que $B'A'=2OC$ et $(A'B')\perp(OC)$.

B) **Réponse b** : $\boxed{\text{si } j=\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}} \text{ alors } cj+a=0}$

a est fausse, car la droite pointillée, d'après les hypothèses, est la médiatrice de $[CA]$, donc $OA=OC$.
Comme, par hytpohèse, $(OA)\perp(OC)$, alors, dans le triangle CAO, $\hat{A}=\hat{C}=\frac{\pi}{4}$.
b est juste, bien que peu naturel, car cela donne $\left|\frac{a}{\sqrt{2}} \times \frac{c}{\sqrt{2}}\right|=\frac{|a| \times |c|}{2}$, soit $\frac{OA \times OC}{2}$.
c est fausse : il faudrait écrire $b=\frac{a+c}{2}$ (formule du milieu).
d est fausse : c'est $|c|=\frac{\sqrt{2}}{2}|a-c|$ qui serait correct ; cela voudrait dire que $\frac{OC}{AC}=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ (trigonométrie dans le triangle rectangle).

C) **Réponse d** : $\boxed{\text{le point } Z'' \text{ d'affixe } -\bar{z} \text{ peut se trouver sur } \mathcal{C}}$

a est fausse : Z' d'affixe $\bar{z}$ ne peus pas se trouver sur $\mathcal{C}$. Ce cercle ne contient jamais à la fois un point et son symétrique par rapport à (Ox) sauf O, et U d'affixe 2 (car le cercle $\mathcal{C}$ et son symétrique par rapport à (Ox) n'ont que ces deux points-là comme intersection). Or il est indiqué que z n'est pas réel.
b est fausse car $\left(\overrightarrow{ZO},\overrightarrow{ZA}\right)=\frac{\pi}{2}$ puisque $[AB]$ est un diamètre du cercle.
c est fausse car $b=0$ impliquerait $B=0$ donc Z aurait pour affixe $z=2$, ce que l'énoncé ne permet pas.
d est juste car Z'' est le symétrique de Z par rapport à (Oy) : si Z a pour affixe $z=2\mathrm{i}$, alors son symétri--que est lui-même.

Chapitre 11

Énoncés - Intégrales

Dans tous les exercices de ce chapitre :

- les courbes considérées sont dans des repères orthonormés ;
- toutes les aires sont exprimées en unités d'aire.

1 Révisions immédiates du cours

A) $\displaystyle\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x =$

a	b	c	d
$\frac{1}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	0

B) Soit $n \neq 1$. Soit u définie sur $\mathbb{R}^*$ par $u(x) = \dfrac{1}{x^n}$. Une primitive de u est U définie par $U(x) =$:

a	b	c	d
$\dfrac{1}{\frac{1}{n+1}x^n}$	$\dfrac{1}{\frac{1}{n+1}x^{n+1}}$	$-\dfrac{n-1}{x^{n-1}}$	$\dfrac{1}{(1-n)\,x^{n-1}}$

C) Soit f continue sur $\mathbb{R}$. Alors F définie par $F(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)dt$ est :

a	la dérivée de f
b	une primitive de f qui ne s'annule jamais
c	la primitive de f qui s'annule en 1
d	aucune des trois

D) Soit I l'intégrale entre 0 et $\dfrac{\pi}{2}$ de la fonction f définie par $f(x) = 1 - \dfrac{x}{2} + \cos x$. Alors $I =$:

a	b	c	d
$\frac{1}{4}$	$1+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi^2}{16}$	$1+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi^2}{8}$	$-1+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi^2}{8}$

E) Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} - 1$. Alors :

a	une primitive de f est k définie par $k(x) = -2\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} - x$
b	f est une primitive de h définie par $h(x) = -0,5\,\mathrm{e}^{-0,5x} - x$
c	f admet pour primitive g définie par $g(x) = -\dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} - x$
d	une fonction j dont f serait une primitive pourrait être $j(x) = -2\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$

F) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}x}{x} =$

a	b	c	d
$\ln \mathrm{e}$	$\frac{1}{\mathrm{e}}-1$	$1-\frac{1}{\mathrm{e}^2}$	$\left[\frac{2}{x^2}\right]_1^{\mathrm{e}}$

G) $\displaystyle\int_{-\ln 2}^{0} \mathrm{e}^{-3x}\,\mathrm{d}x =$

a	b	c	d
$\frac{8}{3}$	$-\frac{1}{3}(1-3^2)$	$-\frac{1}{3}(1-2^3)$	$1-\mathrm{e}^{-3\ln 2}$

H) Soit f définie par $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -2x & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$. Alors $\displaystyle\int_{-4}^{2} f(t)\,\mathrm{d}t =$

a	b	c	d
-5	14	0	aucune des trois

I) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/4} (\cos^2 x - \sin^2 x)\,\mathrm{d}x =$

a	b	c	d
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi^2}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

2 Premières applications

A) Soit f définie par $f(x) = \begin{cases} -3x+3 & \text{si } x \geqslant 0 \\ 3 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$. Alors :

a	b
$\displaystyle\int_{-3}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{6} \lvert f(t)\rvert\,\mathrm{d}t$	$\displaystyle\int_{-3}^{3} f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_{3}^{6} f(t)\,\mathrm{d}t$
c	**d**
$\displaystyle\int_{-3}^{3} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{6} f(t)\,\mathrm{d}t$	$\displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$

B) $\displaystyle\int_{1}^{-1} x\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x =$

a	b	c	d
$-\frac{2}{\mathrm{e}}$	$\frac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}}$	$-\frac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}}$	aucune des trois

C) Soit f définie par $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} - 1$. Alors : $\displaystyle\int_{0}^{-2} f(t)\,\mathrm{d}t =$

a	b	c	d
$\displaystyle-\int_{0}^{2} f(t)\,\mathrm{d}t$	$\displaystyle\int_{-2}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t$	$\displaystyle-\int_{-2}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t$	aucune des trois

D) Soit f définie par $f(x)$: $(3x+4)\,\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}x} + 4$. Alors une expression de la primitive F de f telle que $F(0) = 1$ est :

a	$F(x) = (-3-4,5\,x)\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}x} + 4$
b	$F(x) = -(2x+4)\,\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}x}$
c	$F(x) = -\frac{2}{3}\left(\frac{3x^2}{2} + 4x\right)\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}x} + 1$
d	$F(x) = -2[(x+2)\mathrm{e}^{-1,5x} - 2,5]$

La figure suivante montre la courbe $\mathcal{C}$ d'une fonction f et l'intégrale $J = \int_{-1}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x$.

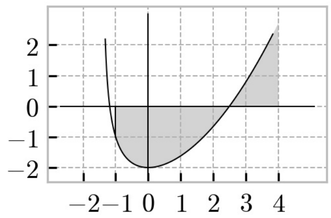


Figure 11.1.

E) a étant l'abscisse du point d'intersection entre $\mathcal{C}$ et l'axe des abscisses, l'aire grisée est égale à :

a	$\int_{-1}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{a}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x$
b	$\int_{-1}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{a}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x$
c	$-\int_{-1}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{a}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x$
d	$-\int_{-1}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{a}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x$

F) La valeur de l'intégrale J est comprise entre :

a	**b**	**c**	**d**
-7 et $-5,5$	$-5,5$ et $-0,5$	$-0,5$ et $0,5$	$0,5$ et 10

G) La valeur de l'intégrale $K = \int_{-1}^{4} |f(x)|\,\mathrm{d}x$ est comprise entre :

a	**b**	**c**	**d**
0 et 1	1 et 3	3 et 9	9 et 12

H) Sur $[-1; 4]$, la fonction $x \mapsto \int_{0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ est :

a	décroissante puis croissante
b	croissante jusqu'en $x = 0$ puis décroissante puis croissante
c	monotone
d	aucune des trois

3 Questions de logique

A) Soit f une fonction vérifiant la propriété P_1 :

$$P_1\text{: « pour tout } x > 0 : \int_{0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t > 0 \text{ et } \int_{-x}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t < 0\text{ »}$$

Alors :

a	P_1 est équivalente à la propriété P_2 suivante : « pour tout $x < 0$: $\int_{0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t < 0$ et $\int_{-x}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t > 0$ »
b	la propriété P_2 définie ci-dessus est le contraire de la propriété P_1
c	P_2 n'est ni équivalente, ni contraire, à P_1
d	aucune des trois

B) Soit f définie et continue sur $\mathbb{R}$ et vérifiant la propriété Q suivante :

$$Q\text{: « pour tout } x \geqslant 0 \text{ tel que } f(x) \geqslant 0, \text{ on a : } \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0\text{ »}$$

a	toute fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$ vérifie Q
b	Q implique que pour tout $x \leqslant 0$ tel que $f(x) \leqslant 0$ on a $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant 0$
c	la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin x$ vérifie cela
d	Q implique $f(0) = 0$ puisque pour tout fonction continue f on a $\int_0^0 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$

C) Soit f une fonction vérifiant la propriété R :

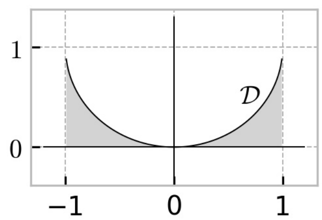
$$R\text{: « pour tout } n \in \mathbb{Z} : \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t = 0\text{ »}$$

Alors :

a	forcément pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a : $f(n) = 0$
b	il est possible que pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on ait : $\int_{0,5}^{n+0,5} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$
c	f doit être périodique de période 1
d	« f ne vérifie pas R » $\Leftrightarrow$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t \neq 0$

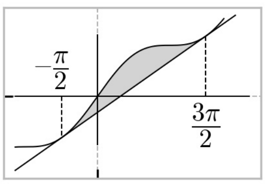
4 Questions en tableaux

A) L'aire grisée sous le demi-cercle $\mathcal{D}$ centré en $(0, 1)$ et de rayon 1 vaut :



a	$3 - \frac{\pi}{2}$
b	$4 - \pi$
c	$\int_{-1}^{1} \sqrt{x^2}\,\mathrm{d}x$
d	$\int_{-1}^{1} \left(1 - \sqrt{1 - x^2}\right)\mathrm{d}x$

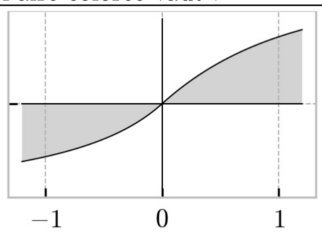
B) L'aire entre ces deux courbes des fonctions f et g définies par :
$f(x) = x - 1$ et $g(x) = x + \sin x$ vaut :



a	$3 - \frac{\pi}{2}$
b	$4 - \pi$
c	$\int_{-1}^{1} \sqrt{x^2}\,\mathrm{d}x$
d	$\int_{-1}^{1} \left(1 - \sqrt{1 - x^2}\right)\mathrm{d}x$

C) Voici la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ -1 + \dfrac{1}{1-x} & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$.

Alors l'aire colorée vaut :



a	$\frac{1}{\mathrm{e}} - \ln 2 + 1$
b	0
c	$[x + \mathrm{e}^{-x}]_0^1 - [-x + \ln(1-x)]_{-1}^0$
d	environ 0,1

D) Parmi les intégrales suivantes, combien sont égales à 1 ?

$I_1 = \int_0^{e-1} \ln(1+x)\,dx \qquad I_2 = \int_0^{e-1} \frac{dx}{1+x}$	a	une seule
	b	deux exactement
$I_3 = \int_0^{\ln 2} e^x\,dx \qquad I_4 = \int_0^1 (3\sqrt{x} - 2x)\,dx$	c	trois exactement
	d	toutes

E) Parmi les intégrales suivantes, combien sont égales à 1 ?

$I_1 = \int_{-0,1}^{0,1} \sin(x)\,dx \qquad I_2 = \int_{-0,1}^{0,1} \left(x - \frac{x^2}{2}\right)dx$	a	une seule
	b	deux exactement
$I_3 = \int_{-0,1}^{0,1} \left(2 - \frac{2}{\sqrt{1+x}}\right)dx \qquad I_4 = \int_{-0,1}^{0,1} (x - x^5)\,dx$	c	trois exactement
	d	toutes

Indication pour I_3 : $\dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$.

F) Parmi les intégrales suivantes, combien sont égales à 1 ?

$I_1 = \int_1^{0,1} x\ln(x)\,dx \qquad I_2 = \int_{-1}^{1} \left(-1 + \frac{1}{1 - \frac{x}{2}}\right)dx$	a	une seule
	b	deux exactement
$I_3 = \int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x^7} \qquad I_4 = \int_{-2}^{-1} x^7\,dx$	c	trois exactement
	d	toutes

5 Questions Vrai/Faux

Pour tout entier $n \geqslant 1$ on pose $I_n = \displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x^n}\,dx$.

Alors :

A) $I_1 = \dfrac{1}{2}$. **V** ☐ **F** ☐

B) La suite (I_n) est croissante. **V** ☐ **F** ☐

C) Pour tout entier $n \geqslant 2$ on a $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n-1}\left(1 - \dfrac{1}{e^{n-1}}\right)$. **V** ☐ **F** ☐

D) Intégrer par parties avec $u = \ln x$ et $v' = \dfrac{1}{x^n}$ donne $(n-1)^2 I_n = 1 - n e^{1-n}$. **V** ☐ **F** ☐

On donne les deux courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ ci-dessous.
L'une de ces courbes représente une fonction f définie et dérivable sur $[0; +\infty[$.
L'autre représente une primitive F de f sur ce même intervalle.
L'une des deux tangentes en 0 est verticale, l'autre est horizontale.

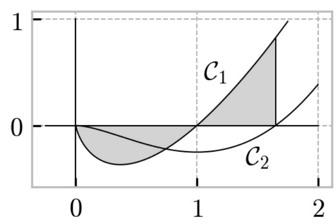


Figure 11.2.

Alors :

E) $\mathcal{C}_2$ est la courbe qui représente f. **V** ☐ **F** ☐

F) Pour tout $x \geqslant 0$, $F(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)dt$. **V** ☐ **F** ☐

G) L'aire de gauche est la même que l'aire de droite. **V** ☐ **F** ☐

H) F est deux fois dérivable et $F''(0) = 0$. **V** ☐ **F** ☐

Soit f continue et à valeurs positives sur $[0;+\infty[$. C_f sa courbe. Pour $x \geqslant 0$, on pose : $$F(x) = \int_1^x f(t)dt \text{ et } G(x) = x\int_1^x f(t)dt.$$

Alors :

I) $G(0) = G(1)$. **V** ☐ **F** ☐

J) G est dérivable sur $[0;+\infty[$ et pour tout $x \geqslant 0$ on a $G'(x) = F(x) + xf(x)$. **V** ☐ **F** ☐

K) L'aire de la surface délimitée par les droites $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$,
et la courbe C_f se calcule par $\frac{1}{2}G(2) - G(0)$. **V** ☐ **F** ☐

L) F est croissante sur $[1;+\infty[$ mais décroissante sur $[0;1]$. **V** ☐ **F** ☐

On pose $f(t) = \sin(\ln(t))$ pour tout $t \geqslant 1$. Soit C_f la courbe de f. Pour tout $x \geqslant 1$, on pose : $$F(x) = \int_1^x f(t)dt.$$

Alors :

M) $f(\mathrm{e}) = \frac{\pi}{2}$. **V** ☐ **F** ☐

N) Pour $1 \leqslant t \leqslant \mathrm{e}^\pi$, alors $f(t) \geqslant 0$. **V** ☐ **F** ☐

O) $F(\mathrm{e}^\pi)$ représente l'aire de la surface limitée par C_f,
et par les droites $x = 1$, $x = \mathrm{e}^\pi$, $y = 0$. **V** ☐ **F** ☐

P) Quel que soit $x \geqslant 1$, $F'(x) \leqslant 1$. **V** ☐ **F** ☐

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}dx$ et $V_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}dx$.

Alors :

Q) La suite U est croissante. **V** ☐ **F** ☐

R) La suite $U + V$ est constante. **V** ☐ **F** ☐

S) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\frac{1}{2(n+1)} \leqslant V_n \leqslant \frac{1}{n+1}$. **V** ☐ **F** ☐

T) La suite U converge vers 1. **V** ☐ **F** ☐

6 Questions ++

A) Soit f une fonction croissante sur $[0,1]$ et deux fois dérivable.
On suppose de plus que partout sur $[0,1]$ on a $f'(x) > 0$.
Soit $n \geqslant 1$ et soit g_n la fonction définie par :

- $g_n\left(\frac{k}{n}\right) = f\left(\frac{k}{n}\right)$ pour tout $k \in \{0;\ldots;n\}$;
- g_n constante sur les intervalles $\left[\frac{k-\frac{1}{2}}{n}, \frac{k+\frac{1}{2}}{n}\right]$ pour tout $k \in \{1;\ldots;n-1\}$;
- g_n constante sur les intervalles $\left[0, \frac{1}{2n}\right]$ et $\left[n - \frac{1}{2n}; n\right]$.

Alors :

a	g_n est continue
b	on ne peut pas affirmer que g_n soit croissante
c	sur $\left[\frac{k-\frac{1}{2}}{n}, \frac{k+\frac{1}{2}}{n}\right]$, $f - g_n$ est positif
d	sur $\left[\frac{k-\frac{1}{2}}{n}, \frac{k+\frac{1}{2}}{n}\right]$, $\lvert f - g_n\rvert$ est majoré par $f\left(\frac{k+\frac{1}{2}}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)$

B) On appelle f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\begin{cases}\max(x,x^2) & \text{si } x\in[-1;2]\\ 1 & \text{si } x<-1\\ 4 & \text{si } x>2\end{cases}.$$

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on pose $F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Alors :

a	f n'est ni majorée, ni minorée
b	les points où f n'est pas dérivable sont : $x=-1$ et $x=2$
c	$F(x)=\begin{cases}\frac{3}{2}+x & \text{si } x\leqslant -1\\ \frac{x^2}{2} & \text{si } -1\leqslant x<0\\ \frac{x}{2} & \text{si } 0\leqslant x\leqslant 1\\ \frac{1+2x^3}{6} & \text{si } 1\leqslant x\leqslant 2\\ 4x-\frac{31}{6} & \text{si } x\geqslant 2\end{cases}$
d	$F(x)=\begin{cases}\frac{3}{2}+x & \text{si } x\leqslant -1\\ \frac{x^2}{2} & \text{si } -1\leqslant x<0\\ \frac{x}{2} & \text{si } 0\leqslant x\leqslant 1\\ \frac{1+2x^3}{6} & \text{si } 1\leqslant x\leqslant 2\\ 4x-\frac{31}{6} & \text{si } x\geqslant 2\end{cases}$

C) Soit f la fonction sinus et C_f sa courbe représentative. Soit $A(\pi/2;1)$ et soit $F(\pi/2;1)$.

Soit D le domaine du plan correspondant à l'intégrale $\displaystyle\int_0^{x_A} f(x)\,\mathrm{d}x$ et soit D' le domaine constitué du domaine D auquel on retranche le triangle OAF.

Alors l'aire U' de D' est donnée par :

a	$U=\displaystyle\int_0^{\pi}\left(\sin(x)-\frac{2}{\pi}x\right)\mathrm{d}x$
b	$U=1-\dfrac{\pi^2}{4}$
c	$U=\left[\cos x-\dfrac{x^2}{\pi}\right]_0^{\pi/2}$
d	aucune des trois

D) Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe un réel $T>0$ tel que pour tout $x\in\mathbb{R}$ on ait $f(x+T)=f(x)$. Pour tout réel a on pose $g(a)=\displaystyle\int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t$ et pour tout réel x on pose $F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Alors :

a	F est dérivable sauf aux points $a+kT, k\in\mathbb{Z}$
b	pour tout réel a, on a $g(a)=F(a+T)-F(a)=0$
c	la dérivée de la fonction g est nulle partout
d	la fonction g ne prend jamais deux fois la même valeur

7 QCM alternatifs (de 0 à 4 réponses justes)

A) Une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifie : pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\displaystyle\int_0^x f(t)dt=10$.

α	alors pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\displaystyle\int_0^{10} f(t)dt=x$
β	alors pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(0)+f(10)+f(x)=0$
γ	alors pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{f(t)}dt=x$
δ	alors pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=0$

B) Une fonction f vérifie $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)dt = 0$ et $\displaystyle\int_{-1}^{1} f^2(t)dt = 1$.

Alors :

α	$f(x) = x$ convient
β	$f(x) = \lvert x\rvert$ convient
γ	il suffit que f soit impaire et que $\displaystyle\int_0^1 f^2(x)dx = \frac{1}{2}$
δ	il faut que f soit impaire et que $\displaystyle\int_0^1 f^2(x)dx = \frac{1}{2}$

C) On cherche des fonctions f vérifiant $\displaystyle\int_0^1 f^2(x) = dx = 1$ (on note en abrégé $f^2(x) = [f(x)]^2$).

α	toute fonction telle que $\left(\displaystyle\int_0^1 f(x)dx\right)^2 = 1$ convient
β	$f(x) = \sqrt{2x}$ convient
γ	$f(x) = \dfrac{1}{x}$ convient
δ	$f(x) = \sqrt{\dfrac{4}{\pi}\sqrt{1-x^2}}$ convient

D) Soit la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x\ln x}$.

α	$\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} f(t)dt = \ln 2$
β	$\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} f'(t)dt = \frac{1-2\mathrm{e}}{2\mathrm{e}^2}$
γ	$\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \mathrm{e}^{\frac{1}{tf(t)}}dt = \frac{\mathrm{e}^2-1}{2}$
δ	$\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2}\left(\int_{\mathrm{e}}^{t} f'(u)du\right)dt = \ln 2 - \mathrm{e} + 1$

8 Sommations, familles de fonctions, tableurs, récurrences, algos

On revient ici au principe « une seule réponse juste ».

A) On pose pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$I_n = \int_0^1 x^n \,\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x.$$

a	pour tout n on a $2\,I_n + n\,I_{n-1} = \mathrm{e}^2$
b	la suite (I_n) est croissante
c	pour tout n on a $I_n > \dfrac{\mathrm{e}^2-1}{2}$
d	aucune des trois

B) On pose pour tout entier $n \geqslant 0$:

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n\,t)}{\sin(t)}\,\mathrm{d}t.$$

a	On peut écrire $I_n - I_{n-1} = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n\,t) - \sin((2n-1)t)}{\sin(t)}\,\mathrm{d}t$
b	On a la relation $I_9 - I_8 = \sin\left(\dfrac{17\pi}{2}\right)$ *Indication : on peut utiliser* $\sin a - \sin b = 2\cos\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\sin\left(\dfrac{a-b}{2}\right)$
c	$I_0 = 1$
d	$I_4 = 2\left(1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7}\right)$

C) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$I_n = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{(\ln x)^n}{x^2}\,\mathrm{d}x \text{ et } S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}.$$

a	pour tout n on a $n\,I_{n-1} - I_n = \mathrm{e}$
b	la suite (I_n) est minorée (par 0) mais pas majorée
c	$S_0 = 0$
d	pour tout n on a $S_n = \mathrm{e} - \dfrac{\mathrm{e} \times I_n}{n!}$

D) Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

Algorithme 11.1

I. $a \leftarrow -\text{pi}$; $I \leftarrow 0$; $m \leftarrow a$
II. pas$\leftarrow$0,001
III. `tant que` $a < \text{pi}$:
IV. $b \leftarrow 1$
V. `tant que` $b > 0$:
VI. $b \leftarrow f(a + \text{pas}) \times f(a)$
VII. $a \leftarrow a + \text{pas}$
VIII. $J \leftarrow \int_m^a f(t)\mathrm{d}t$
IX. `si` $J > 0$ `alors` $I \leftarrow I + J$ `sinon` $I \leftarrow I - J$
X. $m \leftarrow a$

Cet algorithme permet d'approcher :

a	b	c	d
$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \lvert f(x)\rvert\,\mathrm{d}x$	$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$	$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \{f(x) \times f(x+1)\}\,\mathrm{d}x$	$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \text{Max}\{f(x); 0\}\,\mathrm{d}x$

9 Réflexion autour de quelques thèmes mathématiques

Thème 1 : **limites et intégrales**.

A) Pour tout $x > 1$ on pose :

$$F(x) = \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{t}\,\mathrm{d}t \text{ et } G(x) = \int_1^{x} \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{t}\,\mathrm{d}t.$$

On appelle P la propriété suivante :

$$P\colon \mathrm{e}^{-x^4} \int_x^{x^2} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t < F(x) < \mathrm{e}^{-x^2} \int_x^{x^2} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t.$$

a	la fonction u définie dans $]0; +\infty[$ par $u(t) = \dfrac{\mathrm{e}^{-t^2}}{t}$ n'est pas monotone
b	pour tout $x > 0$, la propriété P est vraie
c	(P), si elle est vraie, implique $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{F(x)}{\ln x}\right) = +\infty$
d	(P), si elle est vraie, implique $\displaystyle\lim_{x \to 0} F(x) = 0$

B) Soit $\alpha > 0$. On s'intéresse, pour tout $x > \mathrm{e}$, aux intégrales :

$$R_\alpha(x) = \int_1^x \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \text{ et } B_\alpha(x) = \int_{\mathrm{e}}^x \frac{1}{t^\alpha \ln t}\,\mathrm{d}t.$$

a	$\displaystyle\lim_{x \to +\infty} B_1(x) = 0$
b	la limite $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} R_\alpha(x)$ est finie si $\alpha \geqslant 1$
c	on a toujours $B_\alpha(x) \leqslant R_\alpha(x)$
d	il existe des valeurs de α pour lesquelles $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} R_\alpha(x) = 1$ et $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} B_\alpha(x) = +\infty$

Thème 2 : **la valeur moyenne**.

C) On cherche les valeurs moyennes M et M_2 sur l'intervalle $[0,2\pi]$ des fonctions f et g définies par :

$$f(x)=\sin x \text{ et } g(x)=\sin^2 x.$$

a	$M=\dfrac{1}{2\pi}$
b	pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a $\sin^2 x=\dfrac{\cos(2x)-1}{2}$
c	$M_2=M^2$
d	$M_2=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\dfrac{1}{2}\,\mathrm{d}x$

D) Soit f continue sur $\mathbb{R}$ et à valeurs positives. Soient $a<b$ et m trois réels.
On considère les points :

$$A(a,0),\ B(b,0),\ A'(a,m),\ B'(b,m).$$

Soit $\mathcal{A}$ l'aire du rectangle $ABB'A'$ et soit $\mathcal{A}'$ l'aire de la surface délimitée par la courbe de f, l'axe horizontal, et les deux droites (AA') et (BB').
On suppose que $\mathcal{A}=\mathcal{A}'$.
Alors :

a	$m=\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$
b	la valeur moyenne de f sur $[a,b]$ est égale à $m(b-a)$
c	$m=\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b (f(t))^2\,\mathrm{d}t$
d	$m=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

E) Soit un réel $R>0$ et soit la fonction f définie sur $[0;R]$ par $f(x)=\sqrt{R^2-x^2}$. Alors :

a	l'intégrale $\displaystyle\int_0^R f(x)\,\mathrm{d}x$ représente l'aire d'un demi-disque de rayon R
b	si u désigne une fonction, la dérivée de $u\sqrt{u}$ est $\dfrac{5}{2}u'\sqrt{u}$
c	l'intégrale $\displaystyle\int_0^R x\,f(x)\,\mathrm{d}x$ est égale à $\dfrac{2}{3}\big[(R^2-x^2)\sqrt{R^2-x^2}\big]_0^R$
d	on a $\dfrac{1}{R}\displaystyle\int_0^R x\,f(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{R^3}{3}$

F) Soit f une fonction deux fois dérivable sur $[-1,1]$ (c'est-à-dire que f'' existe). On suppose que :

- f' est strictement croissante sur $[-1,1]$;
- $\displaystyle\int_{-1}^{1} f''(t)\,\mathrm{d}t>0$;
- la valeur moyenne de f' sur $[-1,1]$ est nulle.

Alors on peut affirmer que sur $[-1,1]$:

a	f est croissante
b	f est décroissante
c	f est croissante puis décroissante
d	f est décroissante puis croissante

10 Rédactions d'élèves imaginaires...

A) Théosophe écrit : « *Je veux calculer* $I=\displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 8}\frac{e^x+3}{e^x+4}\,dx$ *et* $J=\displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 8}\frac{1}{e^x+4}\,dx$.

α) *J'ai* $I+J=\displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 8}\frac{e^x+4}{e^x+4}\,dx$, **V** ☐ **F** ☐

β) *j'en déduis* $I+J=\ln 8-\ln 2=2\ln 2$, **V** ☐ **F** ☐

γ) *de plus,* $I-3J=\displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 8}\frac{e^x}{e^x+4}\,dx=[\ln(e^x+4)]_{\ln 2}^{\ln 8}=\ln 12-\ln 6=\ln 2$, **V** ☐ **F** ☐

δ) *par un système je trouve alors* $I=\dfrac{7\ln 2}{4}$ *et* $J=\dfrac{\ln 2}{4}$. » **V** ☐ **F** ☐

B) Uruguay écrit « *Je veux connaître le signe de* $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$:

α) *déjà, si* $f(t)>0$ *entre* a *et* b*, alors l'intégrale est positive ;* **V** ☐ **F** ☐

β) *si* $f(t)$ *prend une seule valeur négative entre* a *et* b,
l'intégrale ne peut pas être positive ; **V** ☐ **F** ☐

γ) *la valeur moyenne d'une fonction entre deux bornes est toujours positive ;* **V** ☐ **F** ☐

δ) *cette intégrale est égale à la valeur moyenne de* f *entre* a *et* b *donc elle est positive.* »

C) Vladimir écrit : « *Je veux montrer que* $\displaystyle\int_0^1 x\,dx=\frac{1}{2}$:

α) *Déjà la courbe* x *est positive entre* 0 *et* 1 *donc c'est normal que le résultat soit positif,* **V** ☐ **F** ☐

β) *ensuite, l'aire* x *forme un triangle isorectangle donc je peux calculer avec la géométrie l'aire vaut* $\dfrac{1\times 1}{2}=\dfrac{1}{2}$, **V** ☐ **F** ☐

γ) *je peux aussi dire que la primitive de la droite* $y=x$ *est la parabole* $y=\dfrac{x^2}{2}$, **V** ☐ **F** ☐

δ) *la fonction* $\dfrac{x^2}{2}$ *prise entre* 0 *et* 1 *a une aire de* $\dfrac{1}{2}-0=\dfrac{1}{2}$. »

D) Watt écrit : « a *est un réel et je cherche* $\displaystyle\int_0^1 a\times x^2\,dx$:

α) *la primitive de* x^2 *est* $\dfrac{x^3}{3}$, **V** ☐ **F** ☐

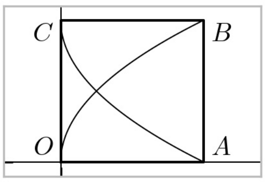
β) *donc je peux dire que* $\left(a\dfrac{x^3}{3}\right)'=x^2$, **V** ☐ **F** ☐

γ) *j'en déduis que* $\displaystyle\int_0^1 a\times x^2\,dx=\left[a\frac{x^3}{3}\right]_0^1$, **V** ☐ **F** ☐

δ) *l'aire sous la fonction* ax^2 *entre* 0 *et* 1 *vaut donc* $\dfrac{a}{3}$. » **V** ☐ **F** ☐

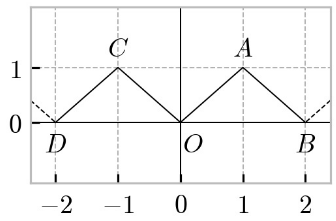
11 Exercices avec graphiques

A) L'une des deux courbes suivantes correspond à la fonction $f(x)=\sqrt{x}$ et l'autre à la fonction $g(x)=1-\sqrt{x}$. On s'intéresse à l'aire de chacune des quatre régions que ces deux courbes délimitent dans le carré $OABC$:



a	le point de croisement a pour abscisse $1/\sqrt{2}$
b	la dérivée de u définie par $u(x)=x\sqrt{x}$ est v définie par $v(x)=\sqrt{x}$
c	deux de ces régions ont pour aire $1/4$
d	la région de gauche a pour aire $3/12$

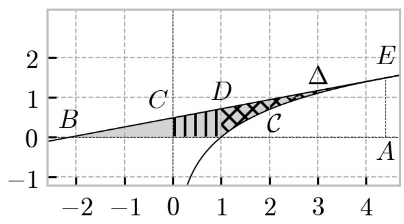
B) Voici la courbe d'une fonction f affine par morceaux.
Pour tout réel x, on pose $F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Alors :



a	F est paire
b	F n'est pas dérivable en 1 et F est décroissante sur $[-2,0]$
c	$F(x) = 1 - x + \dfrac{x^2}{2}$ dans $[1,2]$
d	$F(x) = -1 + 2x - \dfrac{x^2}{2}$ dans $[1,2]$

C) On considère la courbe $\mathcal{C}$ de la fonction f définie par $f(x) = \ln x$.
La droite Δ est la tangente à $\mathcal{C}$ en un certain point E d'abscisse $a > \mathrm{e}$.
A est le projeté orthogonal de E sur l'axe (Ox), soit $A(a,0)$.
D, C sont les points de Δ d'abscisses respectives 1 et 0.
On appelle $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3$ les aires des trois domaines suivants :

- $\mathcal{A}_1$ l'aire du domaine délimité par $(Ox), (Oy), \Delta$ (à gauche en gris) ;
- $\mathcal{A}_2$ l'aire du domaine délimité par (Ox), (Oy), le segment $[BC]$ et la droite d'équation $x = 1$ (hachuré par des lignes verticales) ;
- $\mathcal{A}_3$ l'aire du domaine délimité par $\mathcal{C}, \Delta$ et la droite d'équation $x = 1$ (hachuré par des croisillons).



a	$\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 = \dfrac{a}{2}\left(\dfrac{1}{a} - 1 + \ln a\right)^2$
b	$\mathcal{A}_3 = \dfrac{a}{2} + \dfrac{1}{2a} - \ln a$
c	$\mathcal{A}_1 = \dfrac{a}{2}\,(\ln a + 1)^2$
d	l'équation de Δ est ; $y = \dfrac{x}{a} + 1 - \ln a$

Indication : dériver $x \mapsto x\ln x - x$.

Chapitre 12
Corrigés - Intégrales

1 Révisions immédiates du cours

A) **Réponse** a : $\boxed{\frac{1}{3}}$

$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$.

B) **Réponse** d : $\boxed{\frac{1}{(1-n)x^{n-1}}}$

Soit $n \neq 1$. Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x^n}$ est $x \mapsto \frac{-1}{(n-1)x^{n-1}}$ qui peut s'écrire aussi $x \mapsto \frac{1}{(1-n)x^{n-1}}$.

Remarque :

- pour $n=0$ cela donne : « une primitive de $x \mapsto 1$ est $x \mapsto \frac{1}{(1)x^{-1}} = x$ », ce qui marche aussi ;
- pour $n=1$ par contre le terme en $(1-n)$ s'annule donc la formule donnée ne marche pas. Cela est logique car on sait qu'une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ est $x \mapsto \ln x$ qui ne peut pas s'érire sous la forme x^α.

C) **Réponse** c : $\boxed{\text{la primitive de f qui s'annule en 1}}$

D) **Réponse** b : $\boxed{1+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi^2}{16}}$

$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{x}{2} + \cos(x)\right) dx = \left[x - \frac{x^2}{4} + \sin(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - \frac{\frac{\pi^2}{2^2}}{4} + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi^2}{16} + 1.$

Remarque : pour vérifier que cela est l'aire de la partie de plan délimitée par $\mathcal{C}_f$ (la courbe de f), les axes du repère et la droite $x = \frac{\pi}{2}$, il faudrait s'assurer que la fonction $f(x) = 1 - \frac{x}{2} + \cos(x)$ est positive entre 0 et $\frac{\pi}{2}$. Cela est vrai car elle décroît ($f'(x) = -\frac{1}{2} - \sin(x)$ et $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - \frac{\pi}{4} > 0$ car $\pi > 4$).

E) **Réponse** a : $\boxed{\text{une primitive de } f \text{ est } k \text{ définie par } k(x) = -2e^{-\frac{x}{2}} - x}$

Alors une primitive de f est $F(x) = -2e^{-\frac{x}{2}} - x$ tandis que la dérivée de f est $f'(x) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}$.

F) **Réponse** a : $\boxed{\ln e}$

$\int_1^e \frac{dx}{x} = [\ln x]_1^e = 1$.

G) **Réponse** c : $\boxed{-\frac{1}{3}(1-2^3)}$

$\int_{-\ln 2}^0 e^{-3x} dx = \left[-\frac{1}{3}e^{-3x}\right]_{-\ln 2}^0 = -\frac{1}{3}(1 - e^{3\ln 3}) = -\frac{1}{3}(1-8) = \frac{7}{3}$.

H) **Réponse** b : $\boxed{14}$

$\int_{-4}^2 f(t)dt = \int_{-4}^0 f(t)\,dt + \int_0^2 f(t)\,dt = [-x^2]_{-4}^0 + \left[\frac{-x^2}{2}\right]_0^2 - 16 - 2 = 14.$

I) **Réponse** c : $\boxed{\frac{1}{2}}$

On reconnaît une formule de trigonométrie assez classique.

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2(x) - \sin^2(x)) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2x)\,dx = \left[\frac{1}{2}\sin(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\left(\sin\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}.$

Remarque : rappel des formules de duplication :

$$\begin{cases} \cos(2a) = 2\cos^2 a - 1 = \cos^2 a - \sin^2 a = 1 - \sin^2 a \\ \sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a) \end{cases}.$$

2 Premières applications

A) **Réponse a** : $\boxed{\int_{-3}^{0} f(t)dt = \int_{0}^{6} |f(t)|dt}$

a est juste, car : $\int_{-3}^{0} f(t)dt = 3 \times 3 = 9$ et $\int_{0}^{6} |f(t)|dt = 9$.

b est fausse, car : $\int_{-3}^{3} f(t)dt = 9 + 4,5 = 13,5$ et $2\int_{3}^{6} f(t)dt = 2 \times 4,5 = 9$.

c est fausse, car : $\int_{-3}^{3} f(t)dt = 13,5$ et $\int_{0}^{6} f(t)dt = 6$.

d est fausse, car : $\int_{-1}^{1} f(t)dt = 3 + 1,5 = 4,5$.

B) **Réponse d** : $\boxed{\text{aucune des trois}}$

$\int_{1}^{-1} x\mathrm{e}^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}\int_{1}^{-1} -2x\mathrm{e}^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}[\mathrm{e}^{-x^2}]_{1}^{-1} = -\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-1}) = 0.$

Remarque : la fonction $x \mapsto x\mathrm{e}^{-x^2}$ est impaire donc il était prévisible que son intégrale entre 1 et -1 soit nulle.

C) **Réponse c** : $\boxed{-\int_{-2}^{0} f(t)dt}$

$\int_{0}^{-2} f(t)dt = -\int_{-2}^{0} f(t)dt$ en vertu de la formule $\int_{a}^{b} f(t)dt = -\int_{b}^{a} f(t)dt$.

D) **Réponse d** : $\boxed{F(x) = -2[(x+2)\mathrm{e}^{-1,5x} - 2,5]}$

On pose comme indiqué $u = x^2$ et $v = \mathrm{e}^{-x}$ et on trouve : $u' = 2x$ et $v' = -\mathrm{e}^{-x}$.

$I = \int_{-1}^{1} x^2\mathrm{e}^{-x}dx = [-x^2\mathrm{e}^{-x}]_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} 2x\mathrm{e}^{-x}dx = -\mathrm{e}^{-1} + \mathrm{e} + 2\int_{-1}^{1} x\mathrm{e}^{-x}dx.$

Pour recommencer, on pose $u = x$ et $v = \mathrm{e}^{-x}$, et on trouve : $u' = 1$ et $v' = -\mathrm{e}^{-x}$.

$I = -\mathrm{e}^{-1} + \mathrm{e} + 2\left\{[-x\mathrm{e}^{-x}]_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{-x}dx\right\} = -\mathrm{e}^{-1} + \mathrm{e} + 2\{-\mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e} + [-\mathrm{e}^{-x}]_{-1}^{1}\}$

$I = -3\mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e} + 2(-\mathrm{e}^{-1} + \mathrm{e}) = \mathrm{e} - \frac{5}{\mathrm{e}}.$

Quelques traits de construction utiles :

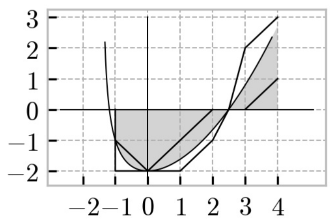


Figure 12.1.

E) Il faut prendre l'intégrale sur $[a, 4]$ (aire comptée positivement) et lui soustraire l'intégrale sur $[-1, a]$ (aire comptée négativement) donc réponse c.

Ensuite, d'après les découpages ci-dessus, l'aire de gauche G est comprise entre 3,5 (deux carreaux et trois demi-carreaux) et 6 (5 carreaux, un demi-carreau et un fragment de carreau qui est plus petit qu'une moitié), tandis que l'aire de droite D est comprise entre 0,5 (un demi-carreau) et 3 (deux carreaux, un demi-carreau, et un fragment de carreau plus petit qu'une moitié). Résumons :

$$\begin{cases} 3,5 \leqslant G \leqslant 6 \\ 0,5 \leqslant D \leqslant 3 \end{cases}.$$

F) $J = D - G$, or $-6 \leqslant G \leqslant -3,5$ d'où $-5,5 \leqslant J \leqslant -0,5$, ce qui est un peu plus précis que la réponse b.

G) $K = D + G$ donc $4 \leqslant K \leqslant 9$: réponse c.

H) La dérivée de cette fonction est f, négative puis positive donc réponse a.

3 Questions de logique

A) **Réponse c** : $\boxed{P_2 \text{ n'est ni équivalente, ni contraire, à } P_1}$
En effet, la propriété P_2 peut aussi s'écrire, en posant $y = x$:

$$\text{« pour tout } y > 0 : \int_0^{-y} f(t)\,\mathrm{d}t < 0 \text{ et } \int_y^0 f(t)\,\mathrm{d}t > 0 \text{ »},$$

ce qui équivaut, en intervertissant les bornes, à :

$$\text{« pour tout } y > 0 : \int_{-y}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t > 0 \text{ et } \int_0^y f(t)\,\mathrm{d}t < 0 \text{ »},$$

qui semble être le contraire de P_1 mais ce n'est pas le cas. Exemple, la fonction f définie par $f(x) = C^{\text{ste}} = 1$ ne vérifie ni P_1 ni P_2. Si P_2 était le contraire de P_1, toute fonction f vérifierait soit l'une soit l'autre.

B) **Réponse c** : $\boxed{\text{la fonction } f \text{ définie sur } \mathbb{R} \text{ par } f(x) = \sin x \text{ vérifie cela}}$
a est fausse : prendre par exemple $f(x) = C^{\text{ste}} = -1$.
b est fausse : car Q ne donne aucune information sur ce qui peut se passer pour $x \leqslant 0$.
c est juste, car $\displaystyle\int_0^x \sin(t)\,\mathrm{d}t = [-\cos(t)]_0^x = 1 - \cos(x)$ est toujours positif ou nul.
d est fausse, car $\displaystyle\int_0^0 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ est toujours vrai même si $f(0) \neq 0$.

C) **Réponse b** : $\boxed{\text{il est possible que pour tout } n \in \mathbb{Z} \text{ on ait : } \displaystyle\int_{0,5}^{n+0,5} f(t)\,\mathrm{d}t = 0}$
a est fausse : prendre $f(x) = \cos(2\pi x)$.
b est juste ; prendre aussi $f(x) = \cos(2\pi x)$.
c est fausse : prendre $f(x) = \begin{cases} \cos(2\pi x) & \text{sur } [0,1] \\ 2\cos(2\pi x) & \text{sur } [1,2] \\ \text{etc} & \end{cases}$.
c est fausse, car le contraire de R est : « il existe un $n \in Z$ tel que $\displaystyle\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ ».

4 Questions en tableau

A) **Réponse d** : $\boxed{\displaystyle\int_{-1}^{1} (1 - \sqrt{1 - x^2})dx}$
Aire du demi-cercle $-$ aire du rectangle $= \dfrac{\pi \times 1^2}{2} - 2 = \dfrac{\pi}{2} - 2$. Cela ne correspond à aucun des deux premiers items.
Il faut donc chercher parmi le c et le d. Le c est l'intégrale de la fonction valeur absolue dont le graphe n'a rien de très arrondi... Donc par élimination, c'est la réponse d.
Explication mathématique :
Si $I(0;1)$, alors $M(x;y)$ est sur le demi-cercle si $IM^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 = 1$ et cela nous donne :
$y\begin{cases} 1 + \sqrt{1 - x^2} \\ 1 - \sqrt{1 - x^2} \end{cases}$ le demi-cercle inférieur (le nôtre) correspond à l'équation du bas.

B) **Réponse a** : $\boxed{3 - \dfrac{\pi}{2}}$
Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $x + \sin(x) \geqslant x - 1$ donc l'aire correspond bien à l'intégrale, pas de problème de signes. On doit alors calculer :
$\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (\sin(x) + 1)dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (1)dx = 2\pi.$
Donc c'est la réponse a (en effet, l'intégrale du sinus sur une période est nulle).

C) **Réponse** a : $\boxed{A=\frac{1}{\mathrm{e}}-\ln 2+1}$

A droite : $\int_0^1(1-\mathrm{e}^{-x})dx=[x+\mathrm{e}^{-x}]_0^1=1+\mathrm{e}^{-1}-1=\frac{1}{\mathrm{e}}$.

A gauche : $\int_{-1}^0\left(-1+\frac{1}{1-x}\right)dx=[-x-\ln(1-x)]_{-1}^0=-1+\ln 2$.

En faisant droit $-$ gauche, on obtient : $A=\frac{1}{\mathrm{e}}-\ln 2+1$.

Dans le c il y avait une erreur de signes donc il est faux.

Enfin, le d proposait la valeur approchée $0,1$ et le candidat n'a pas de calculatrice. Mais il est clair que le domaine de droite a une aire supérieure à $0,25$ (en reliant le point $(0;0)$ au point $(1;0,5)$ on obtient un triangle rectangle d'aire $0,25$ inclus dans ce domaine). Donc cette proposition ne pouvait être vraie.

D) **Réponse** d : $\boxed{\text{toutes}}$

Indications :

- la dérivée de $x\longmapsto(1+x)\ln(1+x)$ est $x\longmapsto\ln(1+x)+1$. On en déduit que la dérivée de $x\longmapsto(1+x)\ln(1+x)-x$ est $x\longmapsto\ln(1+x)$;
- la dérivée de $x\longmapsto x\sqrt{x}$ est $x\longmapsto\sqrt{x}+\frac{x}{2\sqrt{x}}=\sqrt{x}+\frac{1}{2}\sqrt{x}=\frac{3}{2}\sqrt{x}$. On en déduit que la dérivée de $x\longmapsto\frac{2}{3}x\sqrt{x}$ est $x\longmapsto\sqrt{x}$.

Calculons maintenant les intégrales :

$I_1=\int_0^{\mathrm{e}-1}\ln(1+x)dx=[(x+1)\ln(x+1)-x]_0^{\mathrm{e}-1}=\mathrm{e}\ln(\mathrm{e})-(\mathrm{e}-1)=1$.

$I_2=\int_0^{\mathrm{e}-1}\frac{dx}{1+x}=[\ln(1+x)]_0^{\mathrm{e}-1}=\ln\mathrm{e}=1$.

$I_3=\int_0^{\ln 2}\mathrm{e}^x\,dx=[\mathrm{e}^x]_0^{\ln 2}=\mathrm{e}^{\ln 2}-1=2-1=1$.

$I_4=\int_0^1(3\sqrt{x}-2x)dx=[2x\sqrt{x}-x^2]_0^1=2-1=1$.

Ainsi, la bonne réponse est d : toutes les intégrales valent 1.

E) **Réponse** b : $\boxed{\text{deux exactement}}$

- les courbes se ressemblent toutes car on a zoomé autour de 0 et les quatre fonctions vérifient $f'(0)=1$;
- la correction utilise plusieurs fois le principe suivant : si f est impaire alors pour tout x de D_f on a : $\int_{-x}^x f(t)dt=0$. Ceci saute aux yeux car par symétrie l'aire de gauche compense l'aire de droite ;
- si f n'est pas impaire, on peut quand même avoir ponctuellement $\int_{-x}^x f(t)dt=0$ (exemple $\int_{-1}^1(3x^2+2x-1)dx=0$) : dans ce cas il faut donc calculer.

Calculons les intégrales :

$\int_{-0,1}^{0,1}\sin(x)dx=0$ car la fonction sinus est impaire.

$\int_{-0,1}^{0,1}\left(x-\frac{x^2}{2}\right)dx=\int_{-0,1}^{0,1}(x)dx+\int_{-0,1}^{0,1}\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx<0$, strictement négative.

$\int_{-0,1}^{0,1}\left(2-\frac{2}{\sqrt{1+x}}\right)dx=[2x-4\sqrt{1+x}]_{-0,1}^{0,1}=0,2-4\sqrt{1,1}+4\sqrt{0,9}$.

Toute la difficulté consiste à prouver sans calculatrice que $0,2-4\sqrt{1,1}+4\sqrt{0,9}$ n'est pas nul.

Si c'était nul, cela voudrait dire que $0,2=4(\sqrt{1,1}-\sqrt{0,9})$. Utilisons l'indication, cela nous donne : $0,2=4\frac{0,2}{\sqrt{1,1}+\sqrt{0,9}}\Leftrightarrow\sqrt{1,1}+\sqrt{0,9}=4$ or, c'est tout à fait impossible car $\sqrt{1,1}+\sqrt{0,9}<\sqrt{4}+\sqrt{4}=2$.

$\int_{-0,1}^{0,1}(x-x^5)dx=0$ car $x\longmapsto x-x^5$ est impaire.

F) **Réponse** b : $\boxed{\text{deux exactement}}$

$I_1=\int_1^0 x\ln(x)dx=-\int_{0,1}^1 x\ln(x)dx>0$ car la fonction $x\longmapsto x\ln(x)$ est à valeurs strictement négatives dans $]0,1[$.

D'un autre côté, $-1+\frac{1}{1-\frac{x}{2}}=\frac{x}{2-x}$ et ceci est strictement positif dans $[-1;1]$ donc l'intégrale I_2 est

strictement positive.
$I_3 = \displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x^7} < 0$ car, 7 étant impair, la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x^7}$ est à valeurs négatives dans $[-2;-1]$ et, comme les bornes sont rangées dans le bon ordre, l'intégrale est négative. Idem pour I_4.

5 Questions Vrai/Faux

A) | V | |

$I_1 = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{x}\, dx = \frac{1}{2}\int_1^{\mathrm{e}} 2\ln x \times \frac{1}{x}\, dx = \frac{1}{2}[(\ln x)^2]_1^{\mathrm{e}} = \frac{1}{2}$.

Remarque :

- il faut bien connaître les trois dérivées originales suivantes :
  $f(x) = (\ln x)^2$ alors $f'(x) = \dfrac{2\ln x}{x}$,
  $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$ alors $f'(x) = \dfrac{-1}{x(\ln x)^2}$,
  $f(x) = \ln(\ln(x))$ alors $f'(x) = \dfrac{1}{x \ln x}$;
- ne jamais oublier la primitive suivante qui sert souvent : $f = uu'$ donne $F = \dfrac{1}{2}u^2$.

B) | | F |

Pour tout $x \in [1, \mathrm{e}]$ et tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $\dfrac{1}{x^{n+1}} \leqslant \dfrac{1}{x^n}$. Donc $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{x^{n+1}}\, dx \leqslant \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{x^n}\, dx$.
Conséquence : (I_n) est décroisante.

C) | V | |

Pour tout entier $n \geqslant 2$ et tou $x \in [1, \mathrm{e}]$ on a $0 \leqslant \dfrac{\ln x}{x^n} \leqslant \dfrac{\ln \mathrm{e}}{x^n} = \dfrac{1}{x^n}$.
Donc $0 \leqslant \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{x^n}\, dx \leqslant \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x^n}\, dx = \left[\frac{-1}{(n-1)x^{n-1}}\right]_1^{\mathrm{e}} = \frac{1}{n-1}\left(1 - \frac{1}{\mathrm{e}^{n-1}}\right)$.

D) | V | |

En intégrant par parties avec $u = \ln x$ et $v' = \dfrac{1}{x^n}$ on trouve : $u' = \dfrac{1}{x}$ et $v = \dfrac{-1}{(n-1)x^{n-1}}$.
$I_n = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{x^n}\, dx = \left[\frac{-\ln x}{(n-1)x^{n-1}}\right]_1^{\mathrm{e}} + \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{(n-1)n^n}\, dx$.
D'où $I_n = \dfrac{-1}{(n-1)\mathrm{e}^{n-1}} + \left[\dfrac{-1}{(n-1)^2\, x^{n-1}}\right]_1^{\mathrm{e}}$.
Soit $I_n = \dfrac{-1}{(n-1)\mathrm{e}^{n-1}} - \dfrac{-1}{(n-1)^2\mathrm{e}^{n-1}} + \dfrac{1}{(n-1)^2} \Leftrightarrow I_n = \dfrac{1}{(n-1)^2}\left(\dfrac{-n}{\mathrm{e}^{n-1}} + 1\right)$, d'où le résultat en multipliant de part et d'autre par $(n-1)^2$ et en remarquant que $\dfrac{1}{\mathrm{e}^{n-1}} = \mathrm{e}^{1-n}$.

Remarque : l'intégration par parties n'est plus au programme de TS, mais un élève visant la mention apprendra tout de même cette formule avec profit :

$$\int_a^b u(x)\, v'(x)\, \mathrm{d}x = [u(x) \times v(x)] - \int_a^b u'(x)\, v(x)\, \mathrm{d}x.$$

E) | | F |

Appelons f_C et f_Γ les deux fonctions correspondant aux deux courbes du graphique. Alors on peut dire que :

- dans $[0,1]$, $f_C(x) \leqslant 0$ tandis que f_Γ décroît. Le contraire à droite de 1. Ainsi f_C pourrait être la dérivée de f_Γ ;
- en une certaine valeur $\approx 0,4$, f_C cesse de décroître et commence à croître. En cette abscisse, f_Γ ne change pas du tout de signe. Ainsi f_Γ ne pourrait pas être la dérivée de f_C.

Puisqu'on nous dit que l'une des deux fonctions est la dérivée de l'autre, c'est sûr alors que $f_\Gamma' = f_C$ et non pas le contraire. Ainsi, $f_\Gamma = F$ et $f_C = f$.

F) | | F |

F est la primitive de f qui s'annule en 0. Ainsi, pour tout $x \geqslant 0, F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\, dt$.

Remarque : on pourrait dire aussi que $F(x) = \int_{x_A}^{x} f(t)\,dt$ vu que F s'annule en x_A (l'abscisse de A).
Voyez-vous pourquoi les deux écritures sont possibles et équivalentes ?
On ne peut pas dire que $F(x) = \int_1^x f(t)\,dt$ car F ne s'annule pas en 1.

G) | V | |
$F(x_A) - F(0) = 0 \Leftrightarrow \int_0^{x_A} f(t)\,dt = 0$ donc l'aire grisée est la même que l'aire hachurée.

H) | | F |
$F''(0)$ serait égal à $f'(0)$ or f n'est pas dérivable en 0 (tangente verticale).

I) | V | |
$G(0) = 0 \times \int_0^2 f(t)\,dt = 0$ et $G(1) = 1 \times \int_1^1 f(t)\,dt = 0$.

J) | V | |
$G(x) = x \times F(x)$, dérivable comme produit de deux fonctions dérivables sur $[0; +\infty[$.
$G'(x) = F(x) + xF'(x)$ or $F'(x) = f(x)$ par définition.

K) | | F |
f étant positive, l'aire demandée est égale à l'intégrale correspondante sans souci de signe.
On doit calculer : $\int_0^2 f(t)\,dt = F(2) - F(0)$. Or l'expression demandée vaut :
$\frac{1}{2}G(2) - G(0) = \frac{1}{2} \times 2F(2) - G(0) = F(2) - G(0)$.
Est-ce que $F(0) = G(0)$? Pas forcément car $G(0)$ est toujours égal à 0, alors que $F(0)$ n'a aucune raison d'être nul. Dans des cas particuliers cela peut marcher par hasard si $F(0) = 0$, mais dans le cas général la formule est une fausse formule.

L) | | F |
$F'(x) = f(x)$ qui est annoncée à valeurs positives, donc F est croissante sur $[0; +\infty[$.

M) | V | |
$1 \leqslant t \leqslant e^{\pi} \Leftrightarrow \ln t \leqslant \ln(e^{\pi}) = \pi$ donc si $1 \leqslant t \leqslant e^{\pi}$ on prend le sinus d'un réel entre 0 et π, le résultat est alors positif.

N) | V | |
f est à valeurs postives dans $[1; e^{\pi}]$.

O) | V | |
$F'(x) = f(t)$ et ceci, en tant que sinus d'un nombre réel, est toujours, effectivement, majoré par 1.

P) | V | |
Pour tout $x \in [0, 1]$ on a $x^n \geqslant n^{n+1} \geqslant 0$ donc $1 + x^n \geqslant 1 + x^{n+1} \geqslant 0$ donc :
$\frac{1}{1+x^{n+1}} \geqslant \frac{1}{1+x^n} \geqslant 0$. On en déduit que u croît.

Remarque : de même qu'on note usuellement f une fonction et $f(x)$ l'image de x par cette fonction, de même l'enoncé fait la distinction entre u une suite et u_n son n-ième terme.
Cette notation est logique mais moins habituelle. En général pour noter l'objet « suite » sans parler de tel ou tel de ses termes en particulier, on met des parenthèses : u_n est le n-ième terme de la suite (u_n).
Eux, notent u en place et lieu de (u_n).

Q) | V | |
$u_n + v_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,dx + \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,dx = \int_0^1 \frac{1+x^n}{1+x^n} = 1$. La suite $u + v$ est constante.

Remarque : on peut dire aussi que la suite est « stationnaire ».

R) **V**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et tout $x \in [0,1]$, on a $0 \leqslant x^n \leqslant 1$,

donc, $1 \leqslant 1+x^n \leqslant 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{1+x^n} \leqslant 1$ donc $\int_0^1 \frac{x^n}{2}\,dx \leqslant v_n \leqslant v_n = \int_0^1 x^n\,dx$.

D'où le résultat.

S) **V**

De ce qui précède on a $\lim v_n = 0$ et du P) on a donc $\lim u_n = 1$.

6 Questions ++

A) **Réponse d** : $\boxed{\text{sur } \left[\frac{k-\frac{1}{2}}{n}, \frac{k+\frac{1}{2}}{n}\right],\ |f-g_n| \text{ est majoré par } f\left(\frac{k+\frac{1}{2}}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)}$

Illustration pour $n = 10$:

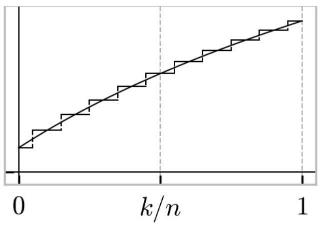


Figure 12.2.

a est fausse, car g_n est clairement discontinue en tout point $\frac{k-\frac{1}{2}}{n}$, pour $k = 1 \ldots n$.

b est fausse, car au contraire on peut affirmer que g_n croissante (mais au sens large bien sûr) : en effet, si $x < y$ sont dans deux intervalles $\left[\frac{k-\frac{1}{2}}{n}; \frac{k+\frac{1}{2}}{n}\right]$ distincts, alors $g_n(x)$ et $g_n(y)$ sont respectivement égaux à $f\left(\frac{k}{n}\right)$ et $f\left(\frac{k'}{n}\right)$ avec $k < k'$ donc, par croissance de f, on a $g_n(x) \leqslant g_n(y)$. Si par contre x et y sont dans le même intervalle, alors $g_n(x) = g_n(y)$. La fonction g_n est donc croissante au sens large.

c est fausse, car sur $\left[\frac{k-\frac{1}{2}}{n}; \frac{k+\frac{1}{2}}{n}\right]$, $f - g_n$ est positif à droite de $\frac{k}{n}$ mais négatif à gauche de $\frac{k}{n}$.

C'est donc, par élimination, la réponse **d** qui est correcte.

Voici la démonstration :

d est juste. En effet, sur $\left[\frac{k-\frac{1}{2}}{n}; \frac{k+\frac{1}{2}}{n}\right]$, $[f-g_n]$ est majoré par $f\left(\frac{k-\frac{1}{2}}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)$ à gauche et par $f\left(\frac{k+\frac{1}{2}}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)$ à droite.

Mais qui des deux, est plus grand ? c'est bien simple, $f\left(\frac{k+\frac{1}{2}}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+\frac{1}{2}}{n}} f'(t)dt$ tandis que $\left|f\left(\frac{k-\frac{1}{2}}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| = \int_{\frac{k+\frac{1}{2}}{n}}^{\frac{k}{n}} f'(t)dt$ et comme f' est croissante par hypothèse, alors f' est plus grand sur le demi-intervalle de droite.

B) **Réponse d** : $\boxed{F(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{2}+x & \text{si } x\leqslant -1\\ \dfrac{x^2}{2} & \text{si } -1\leqslant x<0\\ \dfrac{x}{2} & \text{si } 0\leqslant x\leqslant 1\\ \dfrac{1+2x^3}{6} & \text{si } 1\leqslant x\leqslant 2\\ 4x-\dfrac{31}{6} & \text{si } x\geqslant 2\end{cases}}$

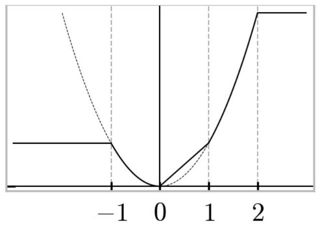


Figure 12.3.

a est fausse, car f est minorée par 0 et majorée par 4.
b est fausse, car incomplète. En effet, les points où f n'est pas dérivable sont $x=-1$ et $x=2$ certes mais aussi $x=0$ et $x=1$.
Pour départager entre c et d il faut être stratégique. Il saute aux yeux, en comptant les carreaux, que $F(1)=\frac{1}{2}$. Manque de chance, les deux le vérifient. Ensuite, $F(-1)=\int_0^{-1}x^2\,dx=-\frac{1}{3}$ et là, plus de doute, c'est la réponse **d**.

C) **Réponse a** : $\boxed{U=\int_0^{\pi}\left(\sin(x)-\frac{2}{\pi}x\right)dx}$

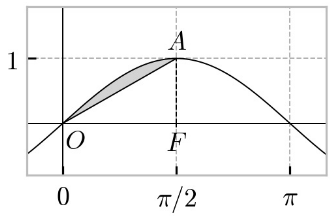


Figure 12.4. L'aire D' (grisée)

L'aire du domaine D vaut $U=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x)\,dx=[-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$.
L'aire du triangle vaut $\frac{\text{base}\times\text{hauteur}}{2}=\frac{1\times\frac{\pi}{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$.
Donc $U=1-\frac{\pi}{4}$. Par conséquent, b est fausse à cause du π^2.
Pour voir la bonne solution, il faudrait écrire l'aire du triangle comme une intégrale. Cela demande de déterminer l'équation de la droite (OA). C'est très simple pour un élève de terminale :

$$(OA): y=\frac{2}{\pi}x$$

Conclusion : $U=\int_0^{\pi}\left(\sin(x)-\frac{2}{\pi}x\right)dx$.

Remarque : la proposition c est fausse car il faudrait écrire $U=\left[-\cos(x)-\frac{x^2}{\pi}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$.

D) **Réponse c** : $\boxed{\text{la dérivée de la fonction } g \text{ est nulle partout}}$
a est fausse, car, f étant continue sur $\mathbb{R}$, F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $F'=f$.
b est fausse, car f est périodique de période T mais cela n'implique pas que F le soit.

Exemple : $f(x)=\sin^2(x)$ est π-périodique, mais toujours strictement positive sauf en $k\pi, k\in\mathbb{Z}$, donc F sera strictement croissante, donc pas périodique. Donc $F(a+T)-F(a)$ ne sera jamais nul.
c est juste, car g a pour expression $g(a)=F(a+T)-F(a)$ donc g' a pour expression :
$g'(a)=f(a+T)-f(a)=0$.

Remarque : nous venons de démontrer que pour toute fonction f continue sur $\mathbb{R}$ et T-périodique :

$$\int_a^{a+T} f(t)\,dt = C^{\text{ste}} = \int_0^T f(t)\,dt.$$

d : Nous venons de montrer que g est constante. Dire que g ne prend jamais deux fois la même valeur est donc contraire à la vérité.

7 QCM alternatifs (de 0 à 4 réponses justes)

A) **β,γ et δ** sont justes.
α est fausse, car $\displaystyle\int_0^{10} f(t)dt=0$ donc ne peut être égal à x pour tout x.
β est juste, car $f(0)+f(10)+f(x)=0$ pour tout x.
γ est juste, car $\mathrm{e}^{f(t)}=1$ pour tout réel t, donc $\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{f(t)}dt=x$.
δ est juste, car $f'(x)=0$ puisque f est constante.

B) **α et γ** sont justes.
α est juste : $f(x)=x$ convient car $\displaystyle\int_{-1}^1 f(t)dt=0$ par imparité de f, et $\displaystyle\int_{-1}^1 f^2(t)dt=\left[\frac{x^2}{x}\right]_{-1}^1=1$.
β est fausse : cela ne convient sûrement pas car $\displaystyle\int_{-1}^1 |t|dt=1>0$.
γ est juste : en effet, dans ce cas f^2 est paire et donc $\displaystyle\int_{-1}^1 f^2(x)dx=2\int_0^1 f^2(x)dx=1$.
δ est fausse : non ce n'est pas nécessaire. En effet, prenons la fonction suivante :

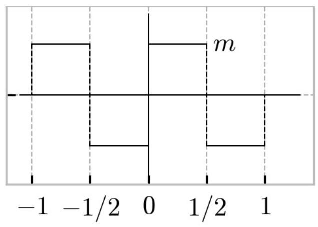


Figure 12.5.

Clairement, $\displaystyle\int_{-1}^1 f(t)dt=0$, et maintenant $\displaystyle\int_{-1}^1 f^2(t)dt=\frac{m^2}{2}+\frac{m^2}{2}+\frac{m^2}{2}+\frac{m^2}{2}=2m^2$, donc, pour $m=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$
on a exactement $\displaystyle\int_{-1}^1 f^2(x)dx=1$ sans pour autant que la fonction ne soit impaire.
C) **β et γ** sont justes.

α est fausse : prenons en effet la fonction $f(x)=\begin{cases} 0, \text{si } x\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right] \\ 2, \text{si } x\in\left[\dfrac{1}{2},1\right]\end{cases}$.

β est juste, car si $f(x)=\sqrt{2}x$, alors $f^2(x)=2x$ et $\displaystyle\int_0^1 2x\,dx=[x^2]_0^1=1$.
γ est fausse, car $f(x)=\dfrac{1}{x}$ n'est pas intégrable sur $[0,1]$: il y a un problème de limite infinie en 0.
δ est juste : En effet, $f^2(x)=\dfrac{4}{\pi}\sqrt{1-x^2}$. Or, la fonction $x\mapsto\sqrt{1-x^2}$ est celle du demi cercle trigono-
-métrique au-dessus de (Ox). Donc $\displaystyle\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx$ est l'aire d'un quart de cercle et vaut $\dfrac{1}{4}\times\pi R^2==\dfrac{\pi}{4}$.

D) $\boldsymbol{\alpha}$**,**$\boldsymbol{\beta}$ **et** $\boldsymbol{\delta}$ sont justes.
$\boldsymbol{\alpha}$ est juste.
$\boldsymbol{\beta}$ est juste : $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} f(t)dt = f(\mathrm{e}^2) - f(\mathrm{e}) = \frac{1}{\mathrm{e}^2 \ln \mathrm{e}^2} - \frac{1}{\mathrm{e} \ln \mathrm{e}} = \frac{1}{2\mathrm{e}^2} - \frac{1}{\mathrm{e}}$, on met au même dénominateur et on trouve : $\dfrac{1-2\mathrm{e}}{2\mathrm{e}^2}$.
γ est fausse : là aussi cela paraît alambiqué mais tout se simplifie :

$$\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \mathrm{e}^{\frac{1}{t\,f(t)}} dt = \int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \mathrm{e}^{\ln(t)} dt = \int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} t\,dt = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} = \frac{\mathrm{e}^4}{2} - \frac{\mathrm{e}^2}{2}.$$

L'énoncé serait juste si l'on avait $\mathrm{e}^4 - \mathrm{e}^2 = \mathrm{e}^2 - 1 \Leftrightarrow \mathrm{e}^2 = 1$ or ce n'est pas le cas puisque $\mathrm{e} > 2$.
$\boldsymbol{\delta}$ est juste : déjà, $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{t} f'(u)du = f(t) - f(e) = f(t) - \frac{1}{\mathrm{e}}$. L'imposante intégrale demandée vaut donc :

$$\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \left(f(t) - \frac{1}{\mathrm{e}}\right) dt = \underbrace{\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} f(t)dt}_{\ln 2} - \int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right) dt = \ln 2 - \frac{1}{\mathrm{e}}(\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}) = \ln 2 - \mathrm{e} + 1.$$

8 Familles, algo et récurrences

A) **Réponse a** : $\boxed{\text{pour tout } n \text{ on a } I_n + \frac{n}{2} I_{n-1} = \frac{\mathrm{e}^2}{2}}$
b est fausse, car pour tout $n \geqslant 0$ on a, dans $[0,1]$: $x_{n+1} \leqslant x_n$, donc au contraire (I_n) est décroissante.
c est fausse, car pour tout $n \geqslant 0$ on a, dans $[0,1]$: $x_n \leqslant 1$, donc au contraire $I_n < \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^2 - 1}{2}$.
La formulation du d nous empêche de conclure par élimination.
On a : $2I_n + n\,I_{n-1} = \displaystyle\int_0^1 (x^n \times 2\mathrm{e}^{2x} + n\,x^{n-1} \times \mathrm{e}^{2x})\,\mathrm{d}x$, or $(x^n \times 2\mathrm{e}^{2x} + n\,x^{n-1} \times \mathrm{e}^{2x}) = (x^n\,\mathrm{e}^{2x})'$.

B) **Réponse d** : $\boxed{I_4 = 2\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right)}$
Stratégiquement, vérifions le c qui paraît plus simple : $I_0 = 0$ saute aux yeux, donc c est fausse.
a est fausse, car présente une confusion entre $2n-1$ et $2(n-1)$.
b est fausse, car $\sin(18t) - \sin(16t) = 2\cos(17t)\sin(t)$ donc $I_9 - I_8 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} 2\cos(17t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{17}\sin\left(\frac{17\pi}{2}\right)$.
d est donc juste par élimination. Pour le comprendre il faut s'inspirer du calcul précédent :
$I_4 - I_3 = \dfrac{2}{7}\sin\left(\dfrac{7\pi}{2}\right) = -\dfrac{2}{7}$ puis $I_3 - I_2 = +\dfrac{2}{5}$ puis $I_2 - I_1 = -\dfrac{2}{3}$ puis $I_1 - I_0 = +\dfrac{2}{1}$ puis $I_0 = 0$ et on somme.

C) **Réponse c** : $\boxed{\text{pour tout } n \text{ on a } S_n = \mathrm{e} - \frac{\mathrm{e} \times I_n}{n!}}$
a est fausse, car $n\,I_{n-1} - I_n = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{n\,(\ln x)^{n-1} - (\ln x)^n}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} \left(\frac{(\ln x)^n}{x}\right)'\mathrm{d}x = \left[\frac{(\ln x)^n}{x}\right]_1^{\mathrm{e}} = \frac{1}{\mathrm{e}}$.
b est fausse, car pour tout $n \geqslant 0$ on a dans $[1,\mathrm{e}]$: $0 \leqslant \ln x \leqslant 1$ donc $0 \leqslant \dfrac{(\ln x)^n}{x^2} \leqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}^2}$ donc $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}^2}$.
Ainsi, (I_n) est minorée et aussi majorée.
c est fausse en raison d'une convention sur les factorielles : $S_0 = \dfrac{1}{0!} = \dfrac{1}{1} = 1$.
d est donc juste par élimination, et se démontre par une simple récurrence en utilisant le résultat trouvé au a. Vu que $\lim\,(I_n) = 0$, ce résultat nous permet d'établir la très belle égalité :

$$1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots = \mathrm{e}.$$

D) **Réponse a** : $\boxed{\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\,\mathrm{d}x}$
Le test sur $b > 0$ revient à savoir si $f(a + \text{pas})$ et $f(a)$ sont de même signe ou pas ; tant que oui, la variable a avance et m ne bouge pas. Lorsque $b < 0$, on calcule $J = \displaystyle\int_m^a f(t)\,\mathrm{d}t$ et on recommence en prenant $m = a$.
La valeur $b = 1$ fixée au départ sert à initier la boucle.

Pour comprendre prenons l'exemple $f(x)=\cos x$:
Au final, la variable J aura pris successivement les valeurs :
$\int_{-\pi}^{-\pi/2} f(t)\,\mathrm{d}t<0$, $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(t)\,\mathrm{d}t>0$, $\int_{\pi/2}^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t<0$, avec des approximations à 0,001 pour les bornes.
Cet algorithme aura donc calculé donc $-\int_{-\pi}^{-\pi/2} f(t)\,\mathrm{d}t+\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(t)\,\mathrm{d}t-\int_{\pi/2}^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t$ soit $\int_{-\pi}^{\pi}|\cos t|\,\mathrm{d}t$.

9 Réflexion autour d'un thème mathématique

Thème : **limites et intégrales**.

A) **Réponse b** : $\boxed{\text{pour tout } x>0, \text{ la propriété } P \text{ est vraie}}$
On remarque que $F(x)=G(x^2)-G(x)$ d'après Chasles.
On remarque aussi que $\int_x^{x^2}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t=\ln(x^2)-\ln(x)=\ln(x)$.
Donc P s'écrit : $\mathrm{e}^{-x^4}\times\ln x<F(x)<\mathrm{e}^{-x^2}\times\ln x$.
a est fausse, car $u'(t)=-\mathrm{e}^{-t^2}\times\frac{2t^2+1}{t^2}<0$ dans $]0;+\infty[$: u est donc décroissante.
b est juste, par encadrement. Pour tout $t\in]x;x^2[$, on a :

$$\begin{aligned}
& x\leqslant t\leqslant x^2 \text{ on va élever au carré, tout est positif :}\\
\Leftrightarrow\ & x^2\leqslant t^2\leqslant x^4 \text{ on va prendre l'opposé :}\\
\Leftrightarrow\ & -x^4\leqslant -t^2\leqslant -x^2 \text{ on va prendre l'exponentielle puis diviser par t :}\\
\Leftrightarrow\ & \frac{\mathrm{e}^{-x^4}}{t}\leqslant\frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{t}\leqslant\frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{t}.
\end{aligned}$$

On peut intégrer l'inégalité de x à x^2 et cela donne P.
c est fausse, car (on divise l'inégalité par $\ln x>0$) : $\mathrm{e}^{-x^4}<\frac{F(x)}{\ln x}<\mathrm{e}^{-x^2}$ donc (par les gendarmes) :

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{F(x)}{\ln x}\right)=0.$$

d est fausse car, l'énoncé ayant fixé $x>1$, rien ne peut en être déduit pour $x\to 0$.

B) **Réponse c** : $\boxed{\text{on a toujours } B_\alpha(x)\leqslant R_\alpha(x)}$
a est fausse, car $x>\mathrm{e}$ et pour $t>\mathrm{e}$ on a $\frac{1}{t^\alpha\ln t}>0$ donc les fonction R_α, correspondant à une aire sous une courbe, sont croissantes et positives.
Si l'on souhaite faire le calcul (instructif) : $B_1(x)=\ln(\ln(x))$, de limite $+\infty$ lorsque $x\to+\infty$.
b est fausse (intégrale dite « de Riemann »), car pour $\alpha=1$ on a $R_\alpha(x)=\ln x$. (b serait vraie pour $\alpha>1$).
c est juste, car pour $t>\mathrm{e}$ on a $\ln t>1$ donc $\frac{1}{t^\alpha\ln t}<\frac{1}{t^\alpha}$ donc $B_\alpha(x)$ intègre quelque chose de plus petit sur un intervalle plus petit ! Donc $B_\alpha(x)\leqslant R_\alpha(x)$.
d est fausse en vertu du **c**.
Pour le lecteur curieux, $\lim\limits_{x\to+\infty}R_\alpha(x)=1$ pour $\alpha=2$ tandis que $\lim\limits_{x\to+\infty}B_\alpha(x)=+\infty$ pour $0<\alpha\leqslant 1$.

Thème : **la valeur moyenne**.

C) **Réponse d** : $\boxed{M_2=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\,\mathrm{d}x}$
a est fausse, car un simple calcul montre que $M=0$.
b est fausse, car $\sin^2 x$ est un carré donc positif, alors que $\cos(2x)-1$ est négatif.
La vraie formule est : $\cos(2x)=1-2\sin^2 x\Rightarrow\sin^2 x=\frac{1-\cos(2x)}{2}$. Elle sert pour la question d.
c est fausse, car $M=0$ tandis que $M_2>0$ vu qu'on intègre une fonction continue qui n'est pas la fonction nulle. De toutes manières, l'intégrale du carré n'est pas le carré de l'intégrale.
d est juste par élimination, le calcul est $M_2=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)\mathrm{d}x$ d'après le résultat vu dans le corrigé du b. Cela s'écrit aussi $M_2=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x-\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\cos(2x)}{2}\right)\mathrm{d}x}_{\text{nul}}$. On trouve $M_2=\frac{1}{2}$, résultat à connaître.

D) **Réponse a** : $\boxed{m=\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t}$

En effet, $\mathcal{A}'=\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\mathcal{A}=m(b-a)$: en fait, m est la valeur moyenne de f sur $[a,b]$.
b, c et d sont fantaisistes.

E) **Réponse d** : $\boxed{\text{on a } \dfrac{1}{R}\displaystyle\int_0^R x\,f(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{R^3}{3}}$

Il faut remarquer que f est l'équation d'un arc de cercle car pour tout x de $[0,R]$, si $M(x,f(x))$ alors $OM^2=x^2+\left(\sqrt{R^2-x^2}\right)^2=R^2$.
a est fausse, car cette intégrale représente l'aire d'un quart de disque.
b est fausse, car $(u\sqrt{u})'=(u^{3/2})'=\dfrac{3}{2}u'\,u^{1/2}=\dfrac{3}{2}u'\sqrt{u}$. Cette formule-là sert pour la question suivante.
c est fausse, car $\displaystyle\int_0^R x\,f(x)\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\int_0^R\frac{3}{2}\underbrace{(-2x)}_{u'}\underbrace{\sqrt{R^2-x^2}}_{u}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\left[(R^2-x^2)\sqrt{R^2-x^2}\right]_0^R$.
d est juste, car $\displaystyle\int_0^R x\,f(x)\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\left[(R^2-x^2)\sqrt{R^2-x^2}\right]_0^R=-\frac{1}{3}\times\left(-R^2\sqrt{R^2}\right)=\frac{R^3}{3}$.

F) **Réponse d** : $\boxed{f \text{ est décroissante puis croissante}}$
Remarques :

- $\displaystyle\int_{-1}^1 f''(t)\,\mathrm{d}t=2$ signifie que $f'(1)-f'(-1)>0$ soit $f'(1)>f'(-1)$.
- « La valeur moyenne de f' sur $[-1,1]$ est nulle » signifie que $\displaystyle\int_{-1}^1 f'(t)\,\mathrm{d}t=0$ donc $f(-1)=f(1)$.Il suffit alors d'imaginer une fonction avec $f'(-1)<0<f'(1)$, donc une courbe qui descend puis remonte à la même hauteur. La courbe la plus simple au lycée ayant cette allure est la parabole d'équation $f(x)=x^2$. Cet exemple démontre que a,b,c sont fausses. Par élimination, **d** est juste. La démonstration rigoureuse s'écrirait ainsi :
- On a forcément $f(-1)<0$ sinon, vu que f' croît strictement, on aurait partout $f'(x)>0$ ce qui est incompatible avec $f(-1)=f(1)$.
- De même $f(1)>0$.
- f' croît donc prend d'abord des valeurs négatives, ensuite des valeurs positives, cqfd.

10 Rédactions d'élèves imaginaires...

A) Réponses :
α)

V	

Vrai car $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b (f+g)(x)\,\mathrm{d}x$.
β)

V	

Vrai car cela donne $I+J=\displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 8} 1\,dx=\ln 8-\ln 2=\ln 2^3-\ln 2=3\ln 2-\ln 2=2\ln 2$.
γ)

V	

Vrai : le déroulement du calcul, pas à pas, est bon.
δ)

V	

Vrai : on peut raisonner par substitution ou par combinaison.

B) Réponses :
Le manque de rigueur des énoncés de Uruguay provient déjà du fait qu'on ne sait pas si $a<b$ ou $a>b$.
α)

	F

Faux car si $a>b$ l'intégrale est négative.
β)

	F

Faux, contrexemple : $a=0, b=1$ et $f(x)=x^2-x+0,2$.
γ)

	F

Faux, pour une fonction à valeurs négatives, la valeur moyenne sera négative.
δ)

	F

Faux, déjà à cause de ce qui précède, et aussi car il manque le facteur $\dfrac{1}{b-a}$.

C) Réponses :

α) | | **F** |

Faux : l'idée est parfaitement juste, mais une courbe ne peut être positive ou négative.

β) | | **F** |

Faux : « x » n'a pas d'aire, une aire ne « forme » pas telle ou telle figure (une surface oui). En dehors de cela l'idée est bonne.

γ) | | **F** |

Faux car une droite n'a pas de « primitive ».

δ) | | **F** |

Faux, une fonction n'a pas d'aire.

D) Réponses :

α) | | **F** |

Faux : c'est une primitive et non pas la primitive. D'autre part la notation x^2 est ambiguë, il faut écrire soit $x \mapsto x^2$, soit donner un nom : $u(x) = x^2$.

Remarque :

- l'ambiguïté vient de ce que la variable n'est pas spécifiée : quelle est la dérivée de la fonction $t \times x^2$? On ne sait pas si on dérive par rapport à t ou à x ;
- les notations $\left[a\dfrac{x^3}{3}\right]_0^1$ et $(u^2)' = 2u'u$ sont sont ambiguës pour les mêmes raisons, mais sont vraiment très usuelles... Il ne faut les utiliser que s'il ne se trouve qu'une seule variable entre les crochets.

β) | | **F** |

Faux, la notation : le prime pourrait très bien désigner la dérivation par rapport à a... Il est vrai que dans l'usage, cette notation est admise, mais dans un exercice prévu spécialement pour traquer les notations non orthodoxes, on doit relever l'imprécision et donc le caractère faux de cette notation.

γ) | **V** | |

δ) | | **F** |

Faux : c'est l'aire sous la courbe de la fonction.

11 Exercices avec graphiques

A) **Réponse c** : $\boxed{\text{deux de ces régions ont pour aire } \frac{1}{4}}$

Remarque : dans cette question comme dans beaucoup d'autres, l'énoncé, même s'il propose des résultats intermédiaires qui sont faux, vous guide avec ces résultats, en vous aidant à savoir quoi puis quoi calculer pour parvenir aux questions finales.

a est fausse, car l'abscisse x du point de croisement vérifie $\sqrt{x} = 1 - \sqrt{x} \Leftrightarrow \sqrt{x} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{4}$.
b est fausse, car la dérivée de $u(x) = x\sqrt{x}$ est $v(x) = \dfrac{3}{2}\sqrt{x}$.
Maintenant nous devons calculer.

$$L = \int_{\frac{1}{4}}^{1} (\sqrt{x} - (1 - \sqrt{x}))dx = \int_{\frac{1}{4}}^{1} (2\sqrt{x} - 1)dx = \left[\frac{2}{\frac{3}{2}} x\sqrt{x} - x\right]_{\frac{1}{4}}^{1} = \frac{4}{3} - 1 - \frac{4}{3} \times \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{5}{12}.$$

$$p = \int_0^{\frac{1}{4}} ((1 - \sqrt{x}) - \sqrt{x})dx = \int_0^{\frac{1}{4}} (1 - 2\sqrt{x})dx = \left[x - \frac{2}{\frac{3}{2}} x\sqrt{x}\right]_0^{\frac{1}{4}} = -\frac{4}{3} \times \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

$$K = \frac{1}{2}(1 - L - p) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{12} - \frac{5}{12}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{6}{12} = \frac{1}{4}.$$

B) **Réponse d** : $\boxed{F(x) = -1 + 2x - \dfrac{x^2}{2} \text{ dans } [1;2]}$

a est fausse : F n'est pas paire car $F(1) = \dfrac{1}{2}$ tandis que $F(-1) = -\dfrac{1}{2}$.

Remarque : lorsque f est paire alors $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$ est impaire, et vice-versa.

b est fausse : f est continue sur $\mathbb{R}$ donc F est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, f est à valeurs positives partout donc F est partout croissante.
Dans $[1;2]$, $f(x)=2-x$ et dans $[0;1]$, $f(x)=x$ donc, pour $x\in[1;2]$:

$$F(x)=\underbrace{\int_0^1 t\,dt}_{\frac{1}{2}}+\int_1^x(2-t)dt=\frac{1}{2}+\left[2t-\frac{t^2}{2}\right]_1^x=\frac{1}{2}+2x-\frac{x^2}{2}-2+\frac{1}{2}=-1+2x-\frac{x^2}{2}.$$

C) **Réponse a** : $\boxed{\mathcal{A}_1+\mathcal{A}_2=\frac{a}{2}-1}$

L'indication demande la dérivée de $x\longmapsto x\ln x-x$ qui est $x\longmapsto x\times\frac{1}{x}+1\times\ln x-1=\ln x$: l'indication nous donne donc une primitive de la fonction ln.
Les calculs donnent :

- Équation de Δ :
  $y=f'(a)(x-a)+f(a)$ puis
  $y=\frac{1}{a}(x-a)+\ln a$
  $y=\frac{x}{a}-1+\ln a$ donc d est fausse.
- Calcul de $\mathcal{A}_3$:
  $\mathcal{A}_3=\int_1^a\left(\frac{x}{a}-1+\ln a-\ln x\right)$
  $\mathcal{A}_3=\left[\frac{x^2}{2a}\right]_1^a+(a-1)(\ln a-1)-[x\ln x-x]_1^a$
  $\mathcal{A}_3=\frac{a}{2}-\frac{1}{2a}+a\ln a-\ln a-a+1-a\ln a+a-1$
  $\mathcal{A}_3=\frac{a}{2}-\frac{1}{2a}-\ln a$ donc b est fausse.
- Calcul de $\mathcal{A}_1$:
  On résout $\frac{x}{a}-1+\ln a=0\Leftrightarrow x=a(1-\ln a)$ ce qui nous donne les coordonnées du point B :

$$B(a(1-\ln a);0).$$

Ensuite, $C(0;-1+\ln a)$ d'après l'équation de Δ.
  Ainsi, $\mathcal{A}_1=\frac{\text{base}\times\text{hauteur}}{2}=\frac{|a(1-\ln a)|\times|-1+\ln a|}{2}=\frac{a}{2}(\ln a-1)^2$ donc c est fausse.
- Calcul de $\mathcal{A}_1+\mathcal{A}_2$:
  On a $D\left(1;\frac{1}{a}-1+\ln a\right)$ d'après l'équation de Δ.
  Ensuite l'aire $\mathcal{A}_1+\mathcal{A}_2$ est celle d'un triangle :

$$\mathcal{A}_1+\mathcal{A}_2=\frac{\text{base}\times\text{hauteur}}{2}=\frac{(|x_B|+1)\times y_D}{2}=\frac{(a(\ln a-1)+1)\times\left|\frac{1}{a}-1+\ln a\right|}{2}=\frac{a}{2}\left(\frac{1}{a}-1+\ln a\right)^2$$

  donc **a** est juste.

Chapitre 13

Énoncés - Probas

1 Révisions immédiates du cours

Dénombrement

Dans une trousse se trouvent un stylo bleu, deux blancs et quatre rouges, indiscernables au toucher. On tire au hasard et simultanément trois de ces stylos.

Alors :

A) Le nombre de tirages unicolores possibles est égal à :

a	**b**	**c**	**d**
1	2	4	aucune des trois

B) Le nombre de tirages tricolores possibles est égal à :

a	**b**	**c**	**d**
7	8	9	aucune des trois

C) Le nombre de tirages bicolores possibles est égal à :

a	**b**	**c**	**d**
23	24	25	aucune des trois

D) Le nombre de tirages possibles comportant plus de rouges que de blancs est égal à :

a	**b**	**c**	**d**
35	22	19	aucune des trois

Probabilités

E) Un élève se présente à deux concours C_1 et C_2, dont les chances de réussite sont indépendantes l'une de l'autre. Il a une chance sur trois de réussir C_1 et une chance sur trois aussi de réussir C_2. Afin d'augmenter ses chances de réussite, l'élève décide de passer les deux concours. Dans ces conditions, la probabilité que l'élève réussisse au moins un concours est :

a	**b**	**c**	**d**
$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$

F) On tire au hasard une boule dans une urne contenant dix boules numérotées de 1 à 10. On note X la variable aléatoire prenant pour valeur le numéro de la boule tirée. Alors l'espérance $E(X)$ vaut :

a	**b**	**c**	**d**
1	$\frac{1}{10}$	$\frac{11}{2}$	5

Charly participe à un tournoi où il est opposé à Ali puis à Béatrice. On note A l'événement « Charly bat Ali » et B l'événement « Charly bat Béatrice ». Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre de victoires de Charly. On sait que $p(A)=\frac{2}{5}$, $p_A(B)=\frac{7}{10}$, $p(B)=\frac{12}{25}$.

G) $p(A\cap\bar{B})=$

a	b	c	d
$\frac{3}{25}$	$\frac{5}{25}$	$\frac{7}{25}$	$\frac{9}{25}$

H) $p_{\bar{A}}(B)=$

a	b	c	d
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

I) $p(\bar{A}\cap\bar{B})=$

a	b	c	d
$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$

J) $p_{\bar{B}}(A)=$

a	b	c	d
$\frac{5}{12}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{3}{13}$	$\frac{10}{13}$

K) $p(A\cup B)=$

a	b	c	d
$\frac{7}{25}$	$\frac{15}{25}$	$\frac{22}{25}$	$\frac{29}{25}$

L) $p(X=2)=$

a	b	c	d
$p(A\cap B)$	$p(\bar{A}\cap B)$	$p(A\cap\bar{B})$	$p(\bar{A}\cap\bar{B})$

M) $p(X=1)=$

a	b	c	d
$\frac{3}{25}$	$\frac{5}{25}$	$\frac{8}{25}$	$\frac{10}{25}$

N) $E(X)=$

a	b	c	d
$\frac{19}{25}$	$\frac{22}{25}$	$\frac{25}{25}$	$\frac{28}{25}$

2 Premières applications

Dénombrement

A) Dans un pays donné, soit A le nombre de plaques minéralogiques composées de quatre chiffres et de deux lettres, et soit B le nombre de plaques composées de trois chiffres et de trois lettres (on supposera que tous les chiffres de 0 à 9 et toutes les lettres de A à Z sont utilisables).
Alors :

a	b	c	d
$A=B$	$A\geqslant 2\times B$	$B\geqslant 2\times A$	aucune des trois

B) Un parking dispose de dix places libres. On dispose d'une Ferrari, une Kawasaki et une Austin Mini. Combien y a-t-il de possibilités de ranger ces trois engins dans ce parking ? (Chacun prend une place)

a	b	c	d
$\binom{10}{3}$	$\frac{3}{10}$	$\left(\frac{1}{10}\right)^3$	$10\times 9\times 8$

Probabilités

C) Un dé est pipé de sorte que la probabilité d'apparition de chaque face est proportionnelle au numéro de cette face. Dans ces conditions, la probabilité d'apparition du 3 est :

a	b	c	d
$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{3}{6^2}$

D) Un jeu est proposé à un stand. Pour jouer il faut payer 1€ la partie. Une partie consiste à lancer un dé trois fois de suite. Les tirages sont indépendants. Le joueur gagne s'il n'obtient que des 1 et des 2 à chacun des trois lancers. Si le joueur gagne, il reçoit 27€.

a	la probabilité de gagner une partie est $\left(\frac{1}{6}\right)^3$
b	la probabilité de gagner au moins une fois en trois parties est $\frac{1}{9}$
c	ce jeu est équitable
d	la probabilité qu'un joueur gagne la partie sachant qu'il a réussi le premier lancer est la même que la probabilité qu'il ait réussi le premier lancer sachant qu'il a gagné la partie

E) On dispose de 6 boules bleues notées chacune B et 18 rouges notées chacune R réparties dans quatre urnes : $U_1 = \{B, R, R, R\}$, $U_2 = \{B, B, R, R, R, R\}$, $U_3 = \{B, B, B, R, R, R, R, R\}$, $U_4 = \{R, R, R, R, R, R\}$. Un joueur choisit de manière équiprobable un chiffre dans $\{1, 2, 3, 4\}$, puis tire une boule dans l'urne correspondante. Il gagne si la boule tirée est bleue. On note G l'événement « le joueur gagne » et U_i l'événement « le joueur a choisi l'urne U_i ». Alors :

a	b	c	d
$p_{U_1}(G) = \frac{2}{3} p_{U_3}(G)$	$p(G) = \frac{9}{8}$	$p(U_1) = \frac{1}{6}$	$p_{U_2}(G) = p_G(U_2)$

F) X suit une loi exponentielle de paramètre λ et l'on sait que $p(X \in [1;2])$ est le double de $p(X \in [2;3])$. Alors :

a	aucune valeur de λ ne peut satisfaire aux hypothèses
b	toute valeur de $\lambda > 0$ satisfait aux hypothèses
c	une seule valeur de λ, celle-ci : $\lambda = \ln 4$, satisfait aux hypothèses
d	deux valeurs de λ satisfont aux hypothèses

3 Questions de logique

A) Je sais que la probabilité que l'événement A survienne est au moins 0,6, et que la probabilité que l'événement B ne survienne pas est au moins 0,6. Alors la probabilité de l'événément $A \cap B$ est :

a	au plus $0,4$
b	au moins $0,4$
c	toutes les valeurs entre 0 et 1 sont possibles
d	entre 0,4 et 0,6

B) A et B sont indépendants et incompatibles. Alors :

a	l'un des deux événements est l'événement impossible
b	l'un des deux événements est l'événement certain
c	$p(A \cup B) = \frac{p(A) + p(B)}{2}$
d	deux événements ne peuvent être à la fois indépendants et incompatibles

C) X suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$. Soit $x > 0$. Alors le quotient $\frac{p(X \in]-\infty; -x] \cup [x; +\infty[)}{p(X \in [-x, x])}$:

a	tend vers $+\infty$ lorsque $x \to +\infty$
b	tend vers 0 lorsque $x \to 0$
c	tend vers $+\infty$ lorsque $x \to 0$
d	ne vaut jamais $1/2$

4 Questions en tableaux

Un fabriquant de chapeaux prétend qu'une proportion x de ses chapeaux sont sans défauts. On prélève un échantillon de n chapeaux, on en trouve p qui sont sans défauts.

A)L'affirmation du fabriquant est vraie au seuil de 95% lorsque :	a	$n=100, p=29, x=40\%$
	b	$n=400, p=160, x=50\%$
	c	$n=10\,000, p=5\,950, x=60\%$
	d	$n=90\,000, p=61\,200, x=70\%$
B)Imaginons que le fabriquant ait raison avec le chiffre $x=90\%$. Alors :	a	on prend un chapeau, la probabilité qu'il soit sans défauts est 0,18
	b	on prend deux chapeaux, la probabilité qu'ils soient les deux sans défauts est 0,81
	c	on prend trois chapeaux, la probabilité que deux soient sans défauts est 0,081
	d	aucune des trois
C)Imaginons que le fabriquant ait raison et que $x=60\%$. On prend un échantillon de $n=100$ chapeaux. Soit k tel que $0\leqslant k\leqslant 100$. Alors le quotient « probabilité de k chapeaux sans défauts » divisé par « probabilité de k chapeaux avec défauts » est :	a	$\left(\dfrac{0,4}{0,6}\right)^{n-2k}$
	b	$\dfrac{0,4^k}{0,6^n}$
	c	$\dfrac{0,4^k}{0,6^k}\times\dfrac{0,6^n}{0,4^n}$
	d	$\dbinom{n}{p}\times\dfrac{0,4^k}{0,6^k}\times\dfrac{0,6^{n-k}}{0,4^{n-k}}$

On lance n fois à pile ou face une pièce truquée avec $p(\text{face})=x$ où x est un réel de $]0;1[$.

D) On suppose que la probabilité d'obtenir trois fois face est 1/4. Alors on peut avoir :	a	$n=6, x=\dfrac{1}{2}$
	b	$n=5, x=\dfrac{1}{2}$
	c	$n=4, x=\dfrac{1}{2}$
	d	$n=3, x=\dfrac{1}{2}$
[cette question est indépendante de la précédente] E) Soit z la probabilité de n'avoir tiré que des pile. Lorsque n est fixe, z est maximal pour $x=\ldots$	a	$\dfrac{1/n^2}{\binom{n}{1}}$
	b	$\dfrac{1}{n-2}\times\dfrac{1}{n^2}$
	c	$\dfrac{2n}{n-1}$
	d	$\dfrac{1}{n}$

5 Questions Vrai/Faux

Un dé cubique équilibré possède quatre faces noires et deux faces blanches. Un deuxième dé équilibré ayant la forme d'un tétraède régulier possède trois faces blanches et une face noire. On tire à pile ou face une pièce équilibrée, si c'est pile on prend le dé cubique, sinon le dé en tétraèdre. Ensuite on lance le dé choisi.

Remarque : un dé tétraédrique n'a pas de face du dessus, c'est pourquoi quand on lance un tel dé on regarde la face contre la table, ce qui nécessite de soulever le dé.

Alors :

A) La probabilité que la face cachée soit noire est $0,5$. **V** ☐ **F** ☐

B) La probabilité que le dé choisi soit cubique sachant que la face cachée est blanche, est $\frac{4}{13}$. **V** ☐ **F** ☐

C) On répète deux fois l'opération (donc on fait : pièce, dé, pièce, dé). Alors la probabilité que la face cachée ne soit jamais noire est $\frac{1}{12}$. **V** ☐ **F** ☐

D) On ne tire plus à pile ou face. On lance le dé cubique, puis le dé en tétraèdre, puis à nouveau le dé cubique et ainsi de suite. On procède ainsi à 20 lancers de dé (10 fois l'un, 10 fois l'autre). Soit A le nombre de fois où la face cachée est noire. Alors $p(A=19)=\frac{35}{6^{10}}$. **V** ☐ **F** ☐

Soit $n \geqslant 2$.

On considère deux urnes U_1 et U_2 contenant chacune n boules blanches + n boules noires.
On jette un dé cubique équilibré dont les six faces sont numérotées de 1 à 6.
Si le résultat est pair, on prélève, successivement avec remise, deux boules de U_1.
Si le résultat est impair, on prélève, successivement mais sans remise, deux boules de U_2.
On appelle N l'événement : « obtenir deux boules noires ». On désigne par :

- $p_{U_1}(N)$ la probabilité d'obtenir N sachant que les deux boules tirées viennent de U_1 ;
- $p_{U_2}(N)$ la probabilité d'obtenir N sachant que les deux boules tirées viennent de U_2.

Alors :

E) La probabilité d'obtenir deux boules noires de U_1 est $\frac{1}{8}$. **V** ☐ **F** ☐

F) Pour tout entier $n \geqslant 2$, on a $p_{U_1}(N)=p_{U_2}(N)$. **V** ☐ **F** ☐

G) $\lim\limits_{n\to+\infty} p_{U_1}(N)=\lim\limits_{n\to+\infty} p_{U_2}(N)$. **V** ☐ **F** ☐

H) Pour tout entier $n \geqslant 2$, on a $p(N)=\frac{4n-3}{8(2n-1)}$. **V** ☐ **F** ☐

Une rampe lumineuse est constituée d'ampoules bleues, rouges ou jaunes provenant de deux usines U_1 et U_2. U_1 produit 60 % de ces ampoules.

La durée de vie en années de chacune suit une loi exponentielle dont les paramètres sont les suivants :

	Ampoules bleues	Ampoules rouges	Ampoules jaunes
Ampoules de U_1	$\lambda_{B_1}=0,25$	$\lambda_{R_1}=0,20$	$\lambda_{J_1}=0,20$
Ampoules de U_2	$\lambda_{B_2}=0,20$	$\lambda_{R_2}=0,15$	$\lambda_{J_2}=0,10$

Alors :

I) La probabilité qu'une ampoule rouge dure moins de cinq ans sachant qu'elle vient de U_1 est $0,6(1-\mathrm{e}^{-1,25})$. **V** ☐ **F** ☐

J) La probabilité qu'une ampoule bleue dure moins de cinq ans est :

$$1-0,6\mathrm{e}^{-1,25}-0,4\mathrm{e}^{-1}.$$ **V** ☐ **F** ☐

K) La probabilité qu'une ampoule jaune dure entre cinq et dix ans est :

$$\frac{1}{5\,\mathrm{e}}\left(1-\frac{3}{\mathrm{e}}+2\sqrt{\mathrm{e}}\right).$$ **V** ☐ **F** ☐

L) Si la probabilité qu'une ampoule jaune dure au-delà d'une durée a est 20 %, alors $a=10\ln 3$. **V** ☐ **F** ☐

Une usine fabrique des détecteurs de fumée. Ces détecteurs disposent chacun d'une durée de vie aléatoire (en mois), représentée par une variable aléatoire T.

Cette variable suit une loi de probabilité exponentielle de paramètre λ, où $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$.

Les tests indiquent qu'un détecteur donné a une chance sur deux d'être tombé en panne à la fin de son premier mois de bon fonctionnement. En cas de panne, le détecteur défaillant est immédiatement remplacé par un détecteur neuf.

Un contrôle est effectué chaque mois après l'installation du premier détecteur. On admet que le fonctionnement des détecteurs est indépendant d'un détecteur à un autre. On désire équiper une petite salle avec l'un de ces détecteurs de fumée.

Alors :

M) $\lambda = \ln 2$. **V** ☐ **F** ☐

N) La probabilité de changer au moins une fois le détecteur lors de l'un des deux premiers contrôles est égal à $\frac{1}{4}$. **V** ☐ **F** ☐

O) La probabilité de changer le détecteur une fois et une seule lors des cinq premiers contrôles est de $\frac{31}{32}$. **V** ☐ **F** ☐

P) Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, la probabilité que le détecteur ne soit pas changé lors des n premiers contrôles est de $\frac{1}{2^n}$. **V** ☐ **F** ☐

Soit $n \geqslant 3$. Une urne contient :

- n boules blanches, dont 2 sont numérotées 1, les autres étant numérotées 2 ;
- $n+1$ boules rouges, dont 3 sont numérotées 1, les autres étant numérotées 2 ;
- $n+2$ boules noires, dont 4 sont numérotées 1, les autres étant numérotées 2.

Toutes les boules sont indiscernables entre elles au toucher.

On prélève successivement, avec remise, trois boules de l'urne.

On appelle A l'événement : « les trois boules tirées sont de la même couleur ».

Alors :

Q) On a $p(A) = \frac{n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3}{27(n+1)^3}$. **V** ☐ **F** ☐

R) L'événement contraire de A est : « les boules tirées sont de couleur deux à deux distinctes ». **V** ☐ **F** ☐

S) La probabilité que les boules tirées soit rouges est ne varie pas avec n. **V** ☐ **F** ☐

T) La probabilité que les trois boules tirées soient toutes de la même couleur, mais ne portent pas toutes le numéro 1, est $1 - \frac{2^3 + 3^3 + 4^3}{27(n+1)^3}$. **V** ☐ **F** ☐

Questions diverses

U) Considérons un appareil électronique dint la durée de vie est une variable aléatoire qui suit une loi sans vieillissement de paramètre $0,03$. Soient t et h deux réels positifs. Alors, sachant que l'appareil fonctionne à l'instant t, la probabilité qu'il fonctionne encore à l'instant $t+h$ est $1 - \mathrm{e}^{-0,03h}$. **V** ☐ **F** ☐

V) Soit une variable aléatoire X, qui suit une loi exponentielle de paramètre λ. On sait que la probabilité d'avoir $X \geqslant 5$ est $0,2$. Alors, on a $\lambda = \frac{\ln(0,8)}{\ln(5)}$. **V** ☐ **F** ☐

W) Soit une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2}$. Alors, la probabilité d'avoir X supérieur à $\ln 4$ est égale à la probabilité d'avoir X inférieur à $\ln 4$. **V** ☐ **F** ☐

X) Soient deux réels $a < b$. Soit une variable aléatoire X, qui suit une loi de répartition uniforme sur $[a;b]$. On sait que la probabilité d'avoir X compris entre 0 et 5 est $0,2$. Alors, nécessairement $a = 0$ et $b = 25$. **V** ☐ **F** ☐

6 Questions ++

Une entreprise possédant plusieurs usines fabrique des batteries miniatures dont la taille est théoriquement 3 mm, le poids 0,5 g, et l'ampérage 500 mA. Il arrive que des batteries sortant de la chaine de montage n'aient pas les bonnes tailles, poids ou ampérage.

Le cahier des charges indique que 95 % des batteries, au minimum, doivent avoir une marge de moins de 1 % par rapport aux valeurs théoriques.

A) Les batteries sortant de l'usine A ont :

- une probabilité 0,95 d'avoir la bonne taille ;
- une probabilité 0,90 d'avoir le bon poids ;
- une probabilité 0,01 d'avoir la mauvaise taille et le mauvais poids ;
- une probabilité x d'avoir les bons poids, taille, ampérage.

Alors la probabilité que l'ampérage soit bon sachant que le poids et la taille sont bons est égale :

a	à 0,9053 environ
b	à $\dfrac{x}{0,95 \times 0,90}$
c	à x
d	$\dfrac{x}{0,86}$

B) La taille des batteries sortant de l'usine B est donnée par la variable aléatoire T dont la densité est la fonction f définie sur $[0;6]$ par $f(t) = \mu\, x\,(6-x)$.

On admet que l'espérance d'une variable aléatoire X de densité φ sur $[a,b]$ est :

$$E(X) = \int_a^b t \times \varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

a	f n'est en aucun cas une densité de probabilité
b	la variable T n'a pas pour densité $E(T) = 3$, ce qui contredit le cahier des charges de l'usine
c	la variable T a bien pour densité $E(T) = 3$, conformément au cahier des charges de l'usine
d	pour que f soit bien une densité, il faut et il suffit que $\mu = \dfrac{1}{35}$

C) L'usine C annonce qu'elle respecte le cahier des charges. Pour s'en assurer, on prélève un échantillon de 200 batteries dont on mesure les paramètres T, P, A :

	nombre de batteries
$T < 2,97$	5
$2,97 \leqslant T \leqslant 3,03$	190
$T > 3,03$	5
$P < 0,495$	7
$0,495 \leqslant P \leqslant 0,505$	185
$P > 0,505$	8
$A < 495$	2
$495 \leqslant A \leqslant 505$	195
$A > 505$	3

a	L'échantillon permet de valider l'annonce de l'usine C
b	L'échantillon conduit à invalider l'annonce de l'usine C
c	L'échantillon permet de valider l'annonce pour deux des trois paramètres
d	aucune des trois

D) L'usine D teste un nouveau mode de production où chaque batterie est testée à la sortie de la chaîne de montage, et réajustée dans le cas où ses caractéristiques ne sont pas dans les bonnes fourchettes. Elle est ensuite vérifiée à nouveau et si les caractéristiques ne sont toujours pas bonnes, elles part au rebut. Avec cette méthode, le temps de production est parfois plus long, ce qui fait qu'on ne peut pas prévoir à l'avance le nombre de batteries que cette usine produira.

Soit X la variable aléatoire indiquant le nombre de batteries conformes produites par jour, et Y le nombre de batteries qui partent au rebut chaque jour. On admet que X suit une loi uniforme d'intervalle $\{490; ...; 510\}$ et Y une loi uniforme aussi d'intervalle $\{5; ...; 20\}$. On suppose que X et Y sont indépendantes.

Alors la probabilité que l'usine produise 500 batteries un jour donné est :

a	b	c	d
$\frac{3}{250}$	$\frac{1}{91}$	$\frac{1}{20}\times\frac{1}{25}$	$\frac{1}{21}\times\frac{1}{26}$

7 QCM alternatifs (de 0 à 4 réponses justes)

A) Une variable aléatoire X vérifie : $\lim\limits_{x\to\infty} p(X\geqslant x)=0$. Alors cette variable peut suivre :

α	la loi normale $\mathcal{N}(10;\sigma^2)$
β	n'importe quelle loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$
γ	aucune loi normale
δ	aucune des trois

B) Une variable aléatoire X vérifie $p(0\leqslant X\leqslant 1)\in[0,3;0,4]$. Alors X peut être :

α	la loi normale centrée réduite
β	la loi uniforme sur l'intervalle $\left[\frac{2}{3};\frac{5}{3}\right]$
γ	la loi exponentielle de paramètre λ, avec $-\ln(0,7)\leqslant\lambda\leqslant-\ln(0,6)$
δ	parmi ces quatre propositions, trois sont vraies

C) X suit la loi exponentielle de paramètre λ; on s'intéresse à la probabilité :
$f(\lambda)=p\left(\frac{1}{\lambda^2}\leqslant X\leqslant\frac{2}{\lambda^2}\right)$. On a :

α	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(\lambda)=\lim\limits_{x\to 0} f(\lambda)=0$
β	$f(\lambda)$ est maximal pour $\lambda=\frac{1}{\ln 2}$
γ	la valeur maximale de $f(\lambda)$ est $\frac{1}{4}$
δ	on peut avoir $f(\lambda)$ aussi proche de 1 que l'on veut, en choisissant bien la valeur de λ

8 Sommations, familles de fonctions, tableurs, récurrences, algos

On revient ici au principe « une seule réponse juste ».

A) Soit X suivant la loi binomiale $B(n,p)$. On cherche une formule liant $p(X=k)$ et $p(X=k+1)$. On peut affirmer que :

a	$p(X=k+1)=\frac{n-k-1}{k+1}\times\frac{1-p}{p}\times p(X=k)$
b	$p(X=k+1)=\frac{n-k}{k+1}\times\frac{p}{1-p}\times p(X=k)$
c	$p(X=k+1)=\frac{n-k+1}{k+1}\times\frac{1-p}{p}\times p(X=k)$
d	aucune des trois

B) On le tableur suivant, où f représente la densité de la loi normale $\mathcal{N}(\mu=50;\sigma^2=25)$:

colonne `A`	colonne `B`	colonne `C`

`A1=0`
`A2=A1+1`
on recopie `A2` vers le bas
	`B1=binom(100,A1)*0,5^100`
	on recopie `B1` vers le bas
		`C1=int(A1-0,5;A1+0,5;f)`
		on recopie `C1` vers le bas

`binom(n,k)` veut dire $\binom{n}{k}$ et `int(a,b,f)` veut dire $\int_a^b f(t)\,dt$. Alors :

a	les deux colonnes `B` et `C` vont présenter des valeurs numériques assez proches
b	la colonne `B` va présenter des nombres croissants lorsqu'on descend dans le tableur
c	la colonne `C` va présenter des nombres décroissants lorsqu'on descend dans le tableur
d	pour chaque valeur de $n \leqslant 100$, on a `Bn`+`Cn`=1, où `Bn` désigne la `n`-ième ligne de la colonne `B` et idem pour `Cn`

C) On considère l'algorithme suivant :

Algorithme 13.1

I. $N \leftarrow 0$

II. X `un entier aléatoire dans` $\{1,2,3,4,5,6\}$

III. `tant que` ($X \neq 6$ `et` $N \leqslant 100$) :

IV. $N \leftarrow N+1$

V. X `un entier aléatoire dans` $\{1,2,3,4,5,6\}$

Alors :

a	cet algorithme a une probabilité d'environ 0,8 d'atteindre $N=100$
b	la loi de N est donnée par $p(N=k)=\frac{6}{k}\times\left(\frac{1}{6}\right)^k\times\left(\frac{5}{6}\right)^{6-k}$
c	la loi de N est donnée par $p(N=k)=\left(\frac{5}{6}\right)^k\times\frac{1}{6}$
d	on a $\sum_{k\geqslant 0} p(N=k)$

Sacha joue plusieurs fois de suite au même jeu. La probabilité qu'il gagne la première partie est 0,5. Par la suite, s'il gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la suivante est 0,7. S'il perd une partie par contre, la probabilité qu'il perde la suivante est 0,8. On appelle G_n l'événement « Sacha gagne la n-ième partie ».

D) Pour tout $n \geqslant 0$:

a	b	c	d
$p_{n+1}=0,5\,p_n+0,2$	$p_{n+1}=0,2\,p_n+0,5$	$p_{n+1}=0,5\,p_n-0,2$	$p_{n+1}=0,2\,p_n-0,5$

E) On pose $v_n=p_n-\frac{2}{5}$. Alors :

a	(v_n) est arithmétique de raison $r\neq 0$
b	(v_n) est géométrique de raison $q\neq 1$
c	(v_n) est constante
d	aucune des trois

F) La suite (v_n) :

a	diverge
b	converge
c	n'est pas définie pour toutes les valeurs de $n\in\mathbb{N}$
d	aucune des trois

9 Réflexion autour de quelques thèmes mathématiques

Thème : **deux variables aléatoires**.

On tire deux lettres, successivement, et avec remise, d'un sac contenant les lettres M,A,T,H et on considère la variable aléatoire X associée au nombre de voyelles tirées.

Soit Y une variable aléatoire prenant les trois valeurs $-2, 1, 3$ avec des probabilités proportionnelles aux carrés de ces valeurs.

On suppose que X et Y indépendantes.

A) $p(X=0)=$

a	b	c	d
$\frac{7}{16}$	$\frac{8}{16}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{6}{12}$

B) $p(Y=3)=$

a	b	c	d
$\frac{1}{3}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{9}{14}$	$\frac{2}{3}$

C) $E(X)=$

a	b	c	d
0	$0,5$	1	$1,5$

D) $p(X=Y)=$

a	b	c	d
$\frac{3}{112}$	$\frac{25}{56}$	$\frac{1}{112}$	aucune des trois

Soit X une variable aléatoire continue qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0,10]$.

On pose $Y=X^2$ et $Z=Y+1$.

E) $p(0 \leqslant Y \leqslant 9)=$

a	b	c	d
$0,3$	0,9	1	aucune des trois

F) On peut affirmer que :

a	$p(0 \leqslant Z \leqslant 9)=p(1 \leqslant Z \leqslant 10)$
b	$p(1 \leqslant Z \leqslant 10)=0,9$
c	$p(0 \leqslant Z \leqslant 1)=p(9 \leqslant Z \leqslant 10)$
d	aucune des trois

X et Y sont indépendantes et suivent toutes deux une loi uniforme dans $[-1;1]$.

On pose $S=\sqrt{X^2+Y^2}$.

G) On peut affirmer que :

a	l'univers de S est l'intervalle $[0;1]$
b	pour $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant 1$, on a $p(a \leqslant S \leqslant b)=\frac{\pi}{4}(b^2-a^2)$
c	$p(S \geqslant 1)=\frac{1}{2}$
d	aucune des trois

10 Rédactions d'élèves imaginaires...

A) Théosophe écrit : « *Soit X qui suit la loi normale $\mathcal{N}(-1;0)$:*

α) *la probabilité de X est une loi normale ;* **V** ☐ **F** ☐

β) *X ne peut pas être positif puisque $-1<0$;* **V** ☐ **F** ☐

γ) *la probabilité que $X<-1$ est strictement inférieure à la probabilité que $X \leqslant -1$;* **V** ☐ **F** ☐

δ) $p(X \leqslant -1)=p\left(\frac{1}{2}\right)$. » **V** ☐ **F** ☐

B) Uruguay écrit : « *Je lance deux dés et je fais la somme des chiffres obtenus, que j'appelle X :*

α) *la probabilité d'obtenir* 4 *au premier dé est* $\frac{1}{6}$; **V** ☐ **F** ☐

β) *si je recommence* 12000 *fois, j'aurai pour* X 1000 *occurrences du résultat* « 9 » ; **V** ☐ **F** ☐

γ) *la loi* X *est uniforme ;* **V** ☐ **F** ☐

δ) *je recommence* 10 *fois et j'ajoute toutes les valeurs de* X *obtenues; alors la somme obtenue vaut* 65. » **V** ☐ **F** ☐

C) Vladimir écrit : « *Soit* X *de loi* $\mathcal{B}(n=10; p=0,1)$, *alors :*

α) *la moyenne de* X *est* 1 ; **V** ☐ **F** ☐

β) *la probabilité de* X *est* 0, 1 ; **V** ☐ **F** ☐

γ) *l'écart-type de* X *est* 1 ; **V** ☐ **F** ☐

δ) *la probabilité que* X *vale* 10 *est plus petite que* 0, 00001. » **V** ☐ **F** ☐

D) Watt écrit : « *On suppose que* X *suit la loi normale* $\mathcal{N}(0;1)$ *alors :*

α) $p(X=0)=\frac{1}{2}$; **V** ☐ **F** ☐

β) $p(0 \leqslant X \leqslant 1)=1$; **V** ☐ **F** ☐

γ) $\sigma(X)=1$; **V** ☐ **F** ☐

δ) $p(X \neq 0)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$. » **V** ☐ **F** ☐

11 Exercices avec graphiques

A) Voici la courbe d'une fonction f. On admet que f est la densité d'une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$. Soit X une variable aléatoire de densité f.

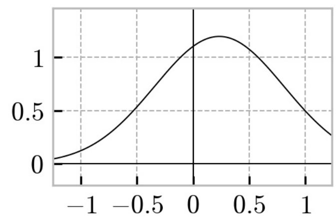


Figure 13.1. Graphique

Alors :

a	$p(0 \leqslant X \leqslant 0,25) \geqslant 1$
b	$p(X \geqslant 0) \leqslant p(X \leqslant 0)$
c	$p(-0,5 \leqslant X \leqslant 0) \geqslant 0,375$
d	$p\left(\frac{1}{2} < X < 1\right) > \frac{1}{2}$

B) Le skieur part du sommet S, et descend au village V. Il peut passer par les relais qu'il veut R_1, R_2, R_3, mais toujours en descendant. Soit X la variable aléatoire indiquant la distance en km parcourue par le skieur.

On admet que :

- depuis le sommet, la probabilité de choisir R_1 égale $1/3$;
- depuis R_1, la probabilité de descendre directement au village est $3/4$;
- cette même probabilité est $2/3$ depuis R_2 ;
- les chiffres indiquent la longueur en km de chaque piste.

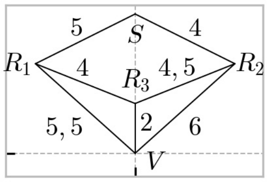


Figure 13.2. Graphique

Alors :

a	b	c	d
$p_{R_1}(R_3) = \dfrac{1}{3}$	$p_{R_3}(R_1) = \dfrac{3}{10}$	$p(X = 11) = \dfrac{1}{12}$	$p(X = 10,5) = \dfrac{1}{4}$

Chapitre 14
Corrigés - Probas

1 Révisions immédiates du cours

A) **Réponse c** : $\boxed{4}$
Il y a $\binom{4}{3} = 4$ tirages unicolores.

B) **Réponse b** : $\boxed{8}$
Il y a $1 \times \binom{2}{1} \times \binom{4}{1} = 8$ tirages tricolores.

C) **Réponse a** : $\boxed{23}$
- tirages bleu/blanc : il y en a un seul ;
- tirages bleu/rouge : il y en a $\binom{4}{2} = 6$;
- tirages blanc/rouge : il y en a $\binom{2}{1} \times \binom{4}{2} + \binom{2}{2} \times \binom{4}{1} = 2 \times 6 + 1 \times 4 = 16$.

Donc en tout $1 + 6 + 16 = 23$ tirages bicolores.

D) **Réponse b** : $\boxed{22}$
Le tirage doit comporter plus de rouges que de blancs. Donc il peut y avoir :
- 3 rouges : 4 possibilités ;
- 2 rouges, 1 blanc : $\binom{4}{2} \times \binom{2}{1} = 12$ possibilités ;
- 2 rouges, aucun blanc : $\binom{4}{2} \times 1 = 6$ possibilités ;
- 1 rouge, aucun blanc : impossible.

En tout : 22 possibilités.

Probabilités

E) **Réponse b** : $\boxed{\frac{5}{9}}$
On va calculer la probabilité qu'il rate les deux concours : ceux-ci étant indépendants, la probabilité du double échec est $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$ d'où la réponse démandée $p = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$.

F) **Réponse c** : $\boxed{\frac{11}{2}}$
$E(x) = \sum_{i=1}^{10} = p_i \times x_i = \sum_{i=1}^{10} = \frac{1}{10}(1 + 2 + ... + 9 + 10)\frac{1}{10} \times \frac{10 \times 11}{2} = 5,5.$

Charly au tournoi

G) **Réponse a** : $\boxed{\frac{3}{25}}$

$p(A \cap \bar{B}) = p(A) \times p_A(\bar{B}) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{10} = \frac{3}{25}$.

H) **Réponse c** : $\boxed{\frac{1}{3}}$
On a $p(B) = p(A \cap B) + p(\bar{A} \cap B) = \frac{2}{5} \times \frac{7}{10} + p(\bar{A} \cap B) = \frac{12}{25}$,

d'où $p(\bar{A} \cap B) = \frac{12}{25} - \frac{7}{25} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$, d'où $p_{\bar{A}}(B) = \frac{p(\bar{A} \cap B)}{p(\bar{A})} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{1}{3}$.

I) **Réponse** b : $\boxed{\dfrac{2}{5}}$
$p(\bar{A}\cap\bar{B})+p(A\cap\bar{B})=p(\bar{B})=\dfrac{13}{25}$, donc $p(\bar{A}\cap\bar{B})=\dfrac{13}{25}-\dfrac{3}{25}=\dfrac{10}{25}=\dfrac{2}{5}$.

J) **Réponse** c : $\boxed{\dfrac{3}{13}}$
$p_{\bar{B}}(A)=\dfrac{p(A\cap\bar{B})}{p(\bar{B})}=\dfrac{\frac{3}{25}}{\frac{13}{25}}=\dfrac{3}{13}$.

K) **Réponse** b : $\boxed{\dfrac{15}{25}}$
$p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)=\dfrac{2}{5}+\dfrac{12}{25}-\dfrac{7}{25}=\dfrac{15}{25}$.

L) **Réponse** a : $\boxed{p(A\cap B)}$
$p(X=2)=p(A\cap B)$.

M) **Réponse** c : $\boxed{\dfrac{8}{25}}$
$p(X=1)=p(A\cap\bar{B})+p(\bar{A}\cap B)=\dfrac{3}{25}+\dfrac{5}{25}=\dfrac{8}{25}$.

N) **Réponse** b : $\boxed{\dfrac{22}{25}}$
$E(X)=0\times p(X=0)+1\times p(X=1)+2\times p(X=2)=\dfrac{8}{25}+2\times\dfrac{7}{25}=\dfrac{22}{25}$.

2 Premières applications

A) **Réponse** c : $\boxed{B\geqslant 2\times A}$
$A=10^4\times 26^2$ et $B=10^3\times 26^3$.
La difficulté ici est qu'on ne dispose pas de calculatrice. Clairement, $B=\dfrac{26}{10}\times A=2,6\times A$ puisqu'on a remplacé un facteur 10 par un facteur 26.
Donc a est faux, b aussi : ça aurait été le contraire, et c'est justement la réponse **c**.

B) **Réponse** a : $\boxed{\dbinom{10}{3}}$
À moins de faire rentrer l'Austin Mini dans la Ferrari, il y a $10\times 9\times 8$ possibilités.

C) **Réponse** a : $\boxed{\dfrac{1}{7}}$
On calcule $1+2+3+4+5+6=21$ d'où $p(3)=\dfrac{3}{21}=\dfrac{1}{7}$.

D) **Réponse** c : $\boxed{\text{ce jeu est équitable}}$
Pour gagner une partie, il faut trois lancers gagnants.
Or, un lancer gagnant survient avec une probabilité de $\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$.
Gagner une partie est donc un événement qui a pour probabilité $\left(\dfrac{1}{3}\right)^3=\dfrac{1}{27}$.

a est fausse, car la probabilité de gagner une partie est $\dfrac{1}{27}$.
b est fausse, car la probabilité pour un joueur de gagner au moins une fois en trois parties est $1-\left(\dfrac{26}{27}\right)^3$.
c est juste, car l'espérance du joueur est $\underbrace{26}_{\text{gain } 27-1}\times\dfrac{1}{27}+\underbrace{(-1)}_{\text{perte}-1}\times\dfrac{26}{27}=0$ donc oui, le jeu est équitable.
d est fausse, les lancers étant indépendants, la probabilité qu'un joueur gagne une partie sachant qu'il a réussi le premier lancer est égale à la probabilité qu'il réussisse deux lancers, soit $\left(\dfrac{1}{3}\right)^3=\dfrac{1}{9}$. Quant à la probabilité qu'il ait gagné le premier lancer sachant qu'il a gagné la partie, elle vaut 1.

E) **Réponse a** : $\boxed{p_{U_1}(G) = \frac{2}{3} p_{U_3}(G)}$

a est juste, car $p_{U_1}(G) = \frac{1}{4}$ et $\frac{2}{3} p_{U_3}(G) = \frac{2}{3} \times \frac{3}{8} = \frac{1}{4}$.
b est fausse, car la réponse proposée est supérieure à 1.
Pour info, on a $p(G) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{3}{8} = \frac{1}{4} \times \frac{23}{24} = \frac{23}{96}$.
c est fausse, car $p(U_1) = \frac{1}{4}$.
d est fausse, car $p_{U_2}(G) = \frac{1}{3}$ (cela se lit sur l'arbre). $p_G(U_2) = \frac{p(G \cap U_2)}{p(G)} = \frac{\frac{1}{\cancel{3}} \times \frac{1}{\cancel{4}}}{\frac{23}{\cancel{4} \times \cancel{3} \times 8}} = \frac{8}{23} \neq \frac{4}{9}$.

F) **Réponse d** : $\boxed{\text{deux valeurs de } \lambda \text{ satisfont aux hypothèses}}$

Cela veut dire que $(E)\,\mathrm{e}^{-\lambda} - \mathrm{e}^{-2\lambda} = 2(\mathrm{e}^{-2\lambda} - \mathrm{e}^{-3\lambda}) \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-\lambda} - 3\mathrm{e}^{-\lambda} + 2\mathrm{e}^{-3\lambda} = 0$ on peut multiplier à gauche et à droite par e^{λ} pour simplifier : $(E) \Leftrightarrow 1 - 3\mathrm{e}^{-\lambda} + 2\mathrm{e}^{-2\lambda} = 0$.
On vérifie $\lambda = \ln 4$ pour voir :
$1 - 3\mathrm{e}^{-\ln 4} + 2\mathrm{e}^{-2\ln 4} = 2 - \frac{3}{4} + \frac{2}{16} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \neq 0$. Donc la réponse c est fausse.
Posons $X = \mathrm{e}^{-\lambda}$ alors $X^2 = \mathrm{e}^{-2\lambda}$ et l'équation devient $1 - 3X + 2X^2 = 0$ avec $\Delta = 1$, on obtient $X_1 = 1$ et $X_2 = \frac{1}{2}$ qui sont deux racines positives, d'où deux solutions pour λ.

3 Questions de logique

A) **Réponse a** : $\boxed{\text{au plus } 0,4}$

L'énoncé indique que $p(\bar{B}) \geqslant 0,6 \Leftrightarrow p(B) \leqslant 0,4$. Or, on a toujours $p(A \cap B) \leqslant p(B)$.
b est fausse, car on pourrait avoir $p(A) = 0,6$ et $p(B) = 0,4$ et $p(A \cap B) = 0$, exemple si l'on tire un nombre dans $\{1; ...; 10\}$ et si $A =$ « le nombre est dans $\{1; ...; 6\}$ » et $B =$ « le nombre est dans $\{7; ...; 10\}$ ».

B) **Réponse a** : $\boxed{\text{l'un des deux événements est l'événement impossible}}$

L'énoncé indique $p(A \cap B) = p(A) \times p(B) = 0$ et un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs l'est.
b est possible mais pas nécessaire.
c est fausse car si A et B sont incompatibles alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$ (sauf dans le cas trivial où $p(A) = p(B) = 0...$).

C) **Réponse c** : $\boxed{\text{tend vers } +\infty \text{ lorsque } x \to 0}$

a est fausse, car lorsque $x \to +\infty$, $p(X \in]-\infty; -x] \cup [x; +\infty[) \to 0$ et $p(X \in [-x, x]) \to 1$.
c est juste, car lorsque $x \to +0$, $p(X \in]-\infty; -x] \cup [x; +\infty[) \to 1$ et $p(X \in [-x, x]) \to 0^+$.
d est fausse, car (principe des valeurs intermédiaires) ce quotient peut prendre toutes les valeurs de $[0; 1]$.

Remarque : le quotient vaut $1/2$ pour $p(X \in [-x, x]) = 2/3 \Leftrightarrow p(X \leqslant x) = 5/6$, on trouve $x \approx 0,7967$.

4 Questions en tableau

A) **Réponse c** : $\boxed{n = 10000, p = 5950, x = 60\%}$

On vérifie que $n > 25$ et $0,2 < x < 0,8$. L'affirmation du fabriquant est vraie au seuil de 95%, lorsque $\frac{p}{n}$ est dans l'intervalle $\left[x - \frac{1}{\sqrt{n}}; x + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$.
Tous les calculs, bien sûr, peuvent être faits sans calculatrice :
a est fausse, car si $x = 40\% = 0,4$ et $n = 100$, alors $\sqrt{n} = 10 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} = 0,1 = 10\%$,
et donc $\left[x - \frac{1}{\sqrt{n}}; x + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = [30\%; 50\%]$; $p = 29$ donc $\frac{p}{n} = 0,29$ ainsi $\frac{p}{n} \notin \left[x - \frac{1}{\sqrt{n}}; x + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$.
b est fausse, car si $x = 50\% = 0,5$ et $n = 400$, alors $\sqrt{n} = 20 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{20} = \frac{0,5}{10} = 0,05 = 5\%$,
donc $\left[x - \frac{1}{\sqrt{n}}; x + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = [45\%; 55\%]$; $p = 160$ donc $\frac{p}{n} = \frac{160}{400} = \frac{40}{100} = 0,40$. Ainsi, $\frac{p}{n} \notin \left[x - \frac{1}{\sqrt{n}}; x + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$.

c est juste, car si $x=60\%=0,6$ et $n=10\,000$, alors $\sqrt{n}=100 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n}}=0,01=1\%$,
donc $\left[x-\frac{1}{\sqrt{n}};x+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]=[59\%;61\%]$; $p=5950$ donc $\frac{p}{n}=0,950$. Ainsi, $\frac{p}{n}\in\left[x-\frac{1}{\sqrt{n}};x+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$.
d est fausse, car si $x=70\%=0,7$ et $n=90000$, alors $\sqrt{n}=300 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{1}{300}\approx\frac{0,333}{100}\approx 0,00333\approx 0,333\%$,
donc $\left[x-\frac{1}{\sqrt{n}};x+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]=[69,667\%;70,333\%]$; $p=61200$ donc $\frac{p}{n}=\frac{612\cancel{00}}{900\cancel{00}}=\frac{204}{300}=\frac{68}{100}=0,68$ et
ainsi, $\frac{p}{n}\notin\left[x-\frac{1}{\sqrt{n}};x+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$.

B) **Réponse b** : $\boxed{\text{on prend deux chapeaux, la probabilité qu'ils soient les deux sans défaut est } 0,81}$
a est fausse ! On prend un chapeau; la probabilité qu'il soit sans défaut est $0,90$.
b est juste : on prend deux chapeaux; la probabilité qu'ils soient sans défaut est $0,9^2=0,81$.
c est fausse ! On prend trois chapeaux; la probabilité que deux soient sans défaut est $0,9^3=0,729$.

C) **Réponse a** : $\boxed{\left(\frac{0,4}{0,6}\right)^{n-2k}}$
On prend un échantillon de $n=100$ chapeaux supposés choisis de manière indépendante les uns des autres. Cela veut dire qu'on peut utiliser, pour la variable $X=$ nombre de chapeaux corrects, la loi binomiale de paramètres $\mathcal{B}(n=100;x=0,6)$.
Le quotient « probabilité qu'il y a k chapeaux sans défauts » divisé par « probabilité qu'il y ait k chapeaux avec défaut » s'écrit $\frac{p(X=k)}{p(X=n-k)}$ et vaut :

$$\frac{p(X=k)}{p(X=n-k)}=\frac{\cancel{\binom{n}{k}}0,6^k\times 0,4^{n-k}}{\cancel{\binom{n}{n-k}}0,4^k\times 0,6^{n-k}}=\frac{0,4^{n-2k}}{0,6^{n-2k}}.$$

b est fausse, car les exposants ne sont pas les bons $\frac{0,4^k}{0,6^n}$.
c est fausse, car il donne $\frac{0,6^{n-k}}{0,4^{n-k}}$.
d est fausse, à cause du coefficient binomial et parce que les $0,6$ et $0,4$ sont intervertis.

D) **Réponse c** : $\boxed{n=4, x=\frac{1}{2}}$
Le contexte montre que les probabilités de « face » sont les mêmes à chaque tirage; d'autre part le nombre de tirages est fixé à l'avance. La variable « nombre de "face" » suit donc la loi $\mathcal{B}(n;x)$. Ainsi, la probablité d'obtenir trois fois « face » est $\binom{n}{3}x^3(1-x)^{n-3}$.
Pour aller plus vite, on remarque que $\binom{n}{3}x^3(1-x)^{n-3}=\underbrace{n(n-1)(n-2)(1-x)^n}_{\text{dépend de } n}\times\underbrace{\frac{1}{6}\left(\frac{x}{1-x}\right)^3}_{\text{ne dépend pas de } n}$ et vu que $x=\frac{1}{2}$ dans toutes les solutions proposées alors $\binom{n}{3}x^3(1-x)^{n-3}=\frac{n(n-1)(n-2)}{2^n}\times\frac{1}{6}$.
a est fausse, car si $n=6$ alors $\frac{n(n-1)(n-2)}{2^n}\times\frac{1}{6}=\frac{5\times 4}{2^6}=\frac{5}{2^4}=\frac{5}{16}>\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$.
b est fausse : si $n=5$ alors $z'(x)=n(1-x)^{n-1}-\underbrace{n(n-1)x(n-x)^{n-2}}_{\text{ne pas oublier le signe}-}=n(1-x)^{n-2}((1-x)-(n-1)x)$.
c est juste, car si $n=4$ alors $\frac{n(n-1)(n-2)}{2^n}\times\frac{1}{6}=\frac{4\times\cancel{3\times 2}}{2^4}\times\frac{1}{\cancel{6}}=\frac{4}{2^4}=\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}$.
d est fausse, car si $n=3$ alors $\frac{n(n-1)(n-2)}{2^n}\times\frac{1}{6}=\frac{\cancel{3\times 2}\times 1}{2^5}\times\frac{1}{\cancel{6}}=\frac{1}{2^5}<\frac{1}{4}$.

E) **Réponse d** : $\boxed{\frac{1}{n}}$
$z(x)=\binom{n}{1}\times x^1\times(1-x)^{n-1}=nx(1-x)^{n-1}$.
On dérive : $z'(x)=n(1-x)^{n-1}-\underbrace{n(n-1)x(1-x)^{n-2}}_{\text{ne pas oublier le signe}-}=n(1-x)^{n-2}((1-x)-(n-1)x)$.
Nul pour $\begin{cases}x=1\\ \text{et}\\ n>2\end{cases}$, (à exclure car $x\in]0,1[$), ou $x=\frac{1}{n}$.

5 Questions Vrai/Faux

A) | | F |

La probabilité que la face cachée soit noire est : $\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{11}{24}\neq\frac{12}{24}$.

B) | V | |

La probabilité que la face cachée soit blanche est donc $\frac{13}{24}$. La probabilité que le dé choisi soit cubique sachant que la face cachée est blanche est : $\dfrac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}{\frac{13}{24}}=\dfrac{\frac{1}{\cancel{6}}}{\frac{13}{4\times\cancel{6}}}=\frac{4}{13}$.

C) | | F |

Lorsqu'on répète deux fois l'opération, la probabilité que la face cachée ne soit jamais noire est :

$$\left(\frac{13}{24}\right)^2\neq\frac{1}{12}.$$

D) | V | |

Soit N_C le nombre de faces noires obtenues avec le dé cubique, N_C suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(10;\frac{2}{3}\right)$.

Soit N_T le nombre de faces noires obtenues avec le dé en tétraède, N_T suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(10;\frac{1}{4}\right)$.
Soit A le nombre de faces noires au total, c'est-à-dire $A=N_C+N_T$.
Alors :

$$\begin{aligned}
p(A=19) &= p(N_T=10\cap N_C=9)+p(N_T=9\cap N_C=10)\\
&= p(N_T=10)\times p(N_C=9)+p(N_T=9)\times p(N_C=10)\\
&= \left(\frac{2}{3}\right)^{10}\times\binom{10}{9}\left(\frac{1}{4}\right)^9\left(\frac{3}{4}\right)+\binom{10}{9}\left(\frac{2}{3}\right)^9\left(\frac{1}{3}\right)\times\left(\frac{1}{4}\right)^{10} \text{ on va factoriser :}\\
&= 10\left(\frac{2}{3}\right)^9\left(\frac{1}{4}\right)^9\left(\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\right)\\
&= \frac{10}{6^9}\times\frac{7}{12}=\frac{5}{6^9}\times\frac{7}{6}=\frac{35}{6^{10}}.
\end{aligned}$$

E) | V | |

Avoir tiré deux boules noires de U_1 veut dire déjà qu'on a tiré un chiffre pair sur le dé : probabilité $1/2$.
Ensuite, la probabilité de tirer une boule noire est $1/2$ et la probabilité de retirer à nouveau une boule noire est encore $1/2$ puisqu'il y a remise.
La probabilité d'avoir tiré deux boules noires de U_1 est donc $p(U_1\cap N)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$.

F) | | F |

$p_{U_1}(N)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$ tandis que $p_{U_2}(N)=\frac{1}{2}\times\frac{n-1}{2n-1}$ et donc $p_{U_1}(N)=p_{U_2}(N)$ serait équivalent à $\frac{1}{2}=\frac{n-1}{2n-1}$, ce qui équivaut encore à $2n-1=2n-2$ ce qui est toujours faux.

G) | V | |

$$\begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty}p_{u_1}(N)=\frac{1}{4}\text{ (suite stationnaire)}\\ \lim\limits_{n\to+\infty}p_{u_2}(N)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\times\frac{n-1}{2n-1}\right)=\frac{1}{4}\end{cases}.$$

Pour un grand nombre de boules, la différence entre faire avec remise ou sans prend moins d'importance.

H) | V | |

Pour tout entier $n\geqslant 2$, on a :

$$\begin{aligned}
p(N) &= p(N\cap U_1)+p(N\cap U_2)\\
&= \frac{1}{8}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{n-1}{2n-1}\\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}+\frac{n-1}{2n-1}\right)\\
&= \frac{4n-3}{8(2n-1)}.
\end{aligned}$$

I) | | F |

Pour une loi exponentielle de paramètre λ, on a $p(X \leqslant t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}$ et $p(X \geqslant t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$.
Ici, si T représente la durée de vie de l'ampoule, on a donc $p_{U_1}(T \leqslant 5) = 1 - \mathrm{e}^{-0,20\times 5} = 1 - \mathrm{e}$.

J) | V | |

La probabilité qu'une ampoule bleue dure moins de cinq ans est :

$$\begin{aligned} p(T \leqslant 5) &= p(U_1 \cap (T \leqslant 5)) + p(U_2 \cap (T \leqslant 5)) \\ &= 0,6(1 - \mathrm{e}^{-5\times 0,25}) + 0,4(1 - \mathrm{e}^{-5\times 0,20}) \\ &= 1 - 0,6\mathrm{e}^{-1,25} - 0,4\mathrm{e}^{-1}. \end{aligned}$$

K) | V | |

Pour une loi exponentielle de paramètre λ, on a $p(a \leqslant X \leqslant b) = \mathrm{e}^{-\lambda a} - \mathrm{e}^{-\lambda b}$.
La probabilité qu'une ampoule jaune dure entre cinq et dix ans est donc :

$$\begin{aligned} p(5 \leqslant T \leqslant 10) &= p(U_1 \cap (5 \leqslant T \leqslant 10)) + p(U_2 \cap (5 \leqslant T \leqslant 10)) \\ &= 0,6(\mathrm{e}^{-5\times 0,20} - \mathrm{e}^{-10\times 0,20}) + 0,4(\mathrm{e}^{-5\times 0,10} - \mathrm{e}^{-10\times 0,10}) \\ &= 0,6(\mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-2}) + 0,4(\mathrm{e}^{-0,5} - \mathrm{e}^{-1}) \\ &= 0,2\,\mathrm{e}^{-1} - 0,6\,\mathrm{e}^{-2} + 0,4\,\mathrm{e}^{-0,5} \\ &= 0,2\,\mathrm{e}^{-1}(1 - 3\,\mathrm{e}^{-1} + 2\,\mathrm{e}^{0,5}) \\ &= \frac{1}{5\,\mathrm{e}}\left(1 - \frac{3}{\mathrm{e}} + 2\sqrt{\mathrm{e}}\right). \end{aligned}$$

L) | V | |

Soit J la durée de vie d'une ampoule jaune, alors :

$$\begin{aligned} p(J \geqslant a) &= p(U_1 \cap (J \geqslant a)) + p(U_2 \cap (J \geqslant a)) \\ &= 0,6 \times \mathrm{e}^{-0,2a} + 0,4 \times \mathrm{e}^{-0,1a}. \end{aligned}$$

Donc : $p(J \geqslant a) = 20\% \Leftrightarrow 0,6 \times \mathrm{e}^{-0,2a} + 0,4 \times \mathrm{e}^{-0,1a} = 0,2$. Donc là, deux méthodes :

- On admet qu'il n'y a qu'une seule valeur possible pour a, et on remplace a par $10\ln(3)$. C'est le plus direct et le plus rapide dans ce QCM.
  Si $a = 10\ln(3)$, alors :

$$\begin{aligned} p(J \geqslant a) &= 0,6 \times \mathrm{e}^{-0,2\times 10\ln(3)} + 0,4 \times \mathrm{e}^{-0,1\times 10\ln(3)} \\ &= 0,6 \times \mathrm{e}^{-2\ln(3)} + 0,4 \times \mathrm{e}^{-\ln(3)} \\ &= \frac{0,6}{9} + \frac{0,4}{3} \\ &= 0,2. \end{aligned}$$

- On résout : cette méthode demande plus d'investissement ; elle utilise un changement de variable. Elle est bonne à connaître, c'est le sens de sa place ici. Bien la regarder et la comprendre. Il s'agit donc de résoudre : $0,6 \times \mathrm{e}^{-0,2a} + 0,4 \times \mathrm{e}^{-0,1a} = 0,2$. Posons $K = \mathrm{e}^{-0,1a}$ alors on est amené à résoudre : $0,6K^2 + 0,4 \times K = 0,2 \Leftrightarrow 6K^2 + 4K - 2 = 0$, on a $\Delta = 64$.
  D'où : $\begin{cases} K_1 = \dfrac{-4-8}{12} = -1, \text{ exclus} \\ K_2 = \dfrac{-4+8}{12} = \dfrac{1}{3} \end{cases}$.
  Ainsi, $\mathrm{e}^{-0,1a} = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow -0,1\,a = -\ln 3 \Leftrightarrow a = 10\ln(3)$.

M) | V | |

La loi de densité de T est la fonction f_λ définie pour $t > 0$ par $f_\lambda(t) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}$.
Les tests indiquent qu'un détecteur donné a une chance sur deux d'être tombé en panne à la fin de son premier mois de bon fonctionnement. Cela signifie que $p(T \geqslant 1) = 50\%$.
Cela se traduit par $\mathrm{e}^{-\lambda} = 0,5 \Leftrightarrow \lambda = \ln 2$.

N) | | F |

La probabilité de changer au moins une fois le détecteur lors de l'un des deux premiers contrôles est $p(T \leqslant 2) = 1 - \mathrm{e}^{-2\lambda} = 1 - \mathrm{e}^{-2\ln 2} = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$.

O) $\boxed{}\boxed{\mathbf{F}}$

Soit T l'intervalle de temps entre le début du fonctionnement et la première panne.
Soit T' l'intervalle de temps entre la première panne et la seconde panne.
T et T' suivent la même loi $\mathcal{E}(\lambda)$.

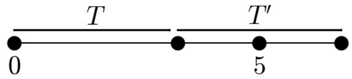


Figure 14.1.

On demande que $T \leqslant 5$ et $T + T' \geqslant 5$. Or, $p(T \leqslant 5) = 1 - \mathrm{e}^{-5\ln 2} = 1 - \dfrac{1}{32} = \dfrac{31}{32}$.
Or, $p(T \leqslant 5 \cap (T + T' \geqslant 5))$ est, logiquement, strictement inférieur à $p(T \leqslant 5)$.
Ainsi, sans calcul supplémentaire, la réponse demandée est strictement inférieure à $\dfrac{31}{32}$.

P) $\boxed{\mathbf{V}}\boxed{}$

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, la probabilité que le détecteur ne soit pas changé lors des n premiers contrôles est : $p(T \geqslant n) = \mathrm{e}^{-n\ln 2} = \dfrac{1}{2^n}$.

Q) $\boxed{\mathbf{V}}\boxed{}$

La probabilité d'obtenir A peut se décomposer ainsi :

- nombre de boules $= 3n + 3 = 3(n+1)$;
- nombre de tirages total $[3(n+1)]^3 = 27(n+1)^3$;
- nombre de tirages BBB: n^3 ;
- nombre de tirages RRR: $(n+1)^3$;
- nombre de tirages NNN: $(n+2)^3$.

Ainsi, $p(A) = \dfrac{n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3}{27(n+1)^3}$.

R) $\boxed{}\boxed{\mathbf{F}}$

L'événement contraire de A est : « les trois boules tirées sont :

- soit de couleur deux à deux distinctes ;
- soit deux d'une même couleur et une troisième d'une couleur distincte des deux autres.

S) $\boxed{\mathbf{V}}\boxed{}$

La probabilité que les trois boules tirées soient rouges est $\dfrac{(n+1)^3}{27(n+1)^3} = \dfrac{1}{27}$.

Remarque :

- la probabilité que les trois boules tirées soit blanches est croissante et tend vers $\dfrac{1}{27}$;
- la probabilité que les trois boules tirées soit noires est décroissante et tend vers $\dfrac{1}{27}$ aussi.

T) $\boxed{}\boxed{\mathbf{F}}$

$\dfrac{2^3 + 3^3 + 4^3}{27(n+1)^3}$ est la probabilité d'avoir les trois boules de la même couleur et toutes trois avec le numéro 1.
Donc $1 - \dfrac{2^3 + 3^3 + 4^3}{27(n+1)^3}$ est la probabilité du contraire, à savoir soit d'avoir au moins deux couleurs dans le tirage, soit d'avoir au moins une boule numérotée 2, ce qui n'est pas la question.
Voici, pour information, la correction :
L'événement demandé, appelons-le N : « les trois boules tirées sont toutes les trois de la même couleur, mais ne portent pas toutes le numéro 1 » peut se décomposer ainsi :

- [trois rouges] sauf [trois rouges numérotées 1] de probabilité :
  $\dfrac{(n+1)^3}{27(n+1)^3} - \dfrac{3^3}{27(n+1)^3}$;
- [trois blanches] sauf [trois blanches numérotées 1] de probabilité :
  $\dfrac{n^3}{27(n+1)^3} - \dfrac{2^3}{27(n+1)^3}$;
- [trois noires] sauf [trois noires numérotées 1] de probabilité :

$\dfrac{(n+2)^3}{27(n+1)^3} - \dfrac{4^3}{27(n+1)^3}$.

Finalement, on trouve :

$$p(N) = \frac{(n+1)^3 + n^3 + (n+2)^3 - (3^3 + 2^3 + 4^3)}{27(n+1)^3}.$$

La simplification de ce calcul n'est pas nécessaire ici, pour information, on trouverait :

$$p(N) = \frac{3n^3 + 9n^2 + 15n - 90}{27(n+1)^3}.$$

U) $\boxed{}\boxed{\textbf{F}}$

En effet, la quantité $1 - \mathrm{e}^{-0,03h}$ tend vers 1 lorsque $h \to +\infty$. Or, la probabilité que l'appareil fonctionne encore à l'instant $t+h$ sachant qu'il fonctionne à l'instant t ne peut tendre vers 1 lorsque que h est grand : cela voudrait dire que, plus on attend, plus la probabilité qu'il vive encore est certaine : or, c'est le contraire.

Pour information :

- L'énoncé parle de durée de vie sans vieillissement, on peut conjecturer que c'est une loi exponentielle.
- Avec une loi exponentielle, on aurait $p_{T>t}(T > t+h) = p(T > h) = \mathrm{e}^{-0,03h}$.

V) $\boxed{}\boxed{\textbf{F}}$

Le paramètre d'une loi exponentielle est toujours positif.

Pour information, on a ici $p(X \geqslant 5) = \mathrm{e}^{-5\lambda} = 0,2 \Leftrightarrow -5\lambda = \ln(0,2) = \ln\left(\dfrac{1}{5}\right) = -\ln(5) \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{\ln(5)}{5}$.

W) $\boxed{\textbf{V}}\boxed{}$

La durée de demi-vie est $\dfrac{\ln(2)}{\lambda} = \dfrac{\ln(2)}{\frac{1}{2}} = 2\ln(2) = \ln(4)$ donc $p(X \leqslant \ln 4) = \dfrac{1}{2} = p(X \geqslant \ln 4)$.

X) $\boxed{}\boxed{\textbf{F}}$

Examinons toutes les situations possibles :

- si $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant 5$ alors $p(0 \leqslant X \leqslant 5) = 1 \neq 0,2$;
- si $a \leqslant 0 \leqslant 5 \leqslant b$ alors $p(0 \leqslant X \leqslant 5) = \dfrac{5}{b-a}$, ici cela nous donne $b - a = 25$, on peut donc très avoir $a = 0$ et $b = 25$ certes mais aussi par exemple $a = -20$ et $b = 5$ ou $a = -11$ et $b = 6$;
- si $0 \leqslant a \leqslant 5 \leqslant b$ alors $p(0 \leqslant X \leqslant 5) = p(a \leqslant X \leqslant 5) = \dfrac{5-a}{b-a}$, cela donne donc : $\dfrac{5-a}{b-a} = 0,2 \Leftrightarrow b + 4a = 25$ soit par exemple $a = 2,5$ et $b = 15$ ou $a = 4$ et $b = 9$;
- de même si $a \leqslant 0 \leqslant b \leqslant 5$ alors on trouve $a + 4b = 25$, ce qui est impossible.

6 Questions ++

A) **Réponse d** : $\boxed{\dfrac{x}{0,86}}$

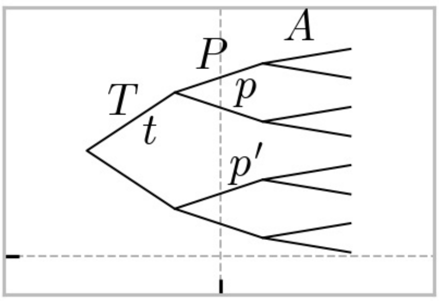


Figure 14.2.

Notons T, P, A les événements « avoir la bonne taille », « avoir le bon poids », « avoir le bon ampérage ».
L'arbre note $t = p(T)$, puis $p = p_T(P)$ et enfin $p' = p_{\bar{T}}(P)$.
Traduisons alors les hypothèses de l'énoncé :

- $t = p(T) = 0,95$;
- $p(P) = t\,p + (1-t)\,p' = 0,90$;
- $p(\bar{T} \cap \bar{P}) = (1-t)\,(1-p') = 0,01$;
- $p(T \cap P \cap A) = x$.

La troisième ligne nous donne p' :

$$\begin{aligned}(1-t)\,(1-p') = 0,01 &\Leftrightarrow 0,05\,(1-p') = 0,01\\ &\Leftrightarrow 1-p' = \frac{0,01}{0,05} = 0,20\\ &\Leftrightarrow p' = 0,80.\end{aligned}$$

La seconde ligne nous donne maintenant $t\,p$:

$$\begin{aligned}t\,p + (1-t)\,p' = 0,90 &\Leftrightarrow t\,p + 0,05 \times 0,80 = 0,90\\ &\Leftrightarrow \boxed{t\,p = 0,86}\\ &\Leftrightarrow p = \frac{0,86}{0,95} \approx 0,9053.\end{aligned}$$

La quatrième ligne nous donne $p_{P \cap T}(A)$:

$$\begin{aligned}p(T \cap P \cap A) = x &\Leftrightarrow p(T \cap P) \times P_{T \cap P}(A) = x\\ &\Leftrightarrow t\,p \times P_{T \cap P}(A) = x\\ &\Leftrightarrow 0,86 \times P_{T \cap P}(A) = x\\ &\Leftrightarrow P_{T \cap P}(A) = \frac{x}{0,86}.\end{aligned}$$

On peut remarquer que cette formule implique $x \leqslant 0,86$, ce qui n'est pas conforme au cahier des charges.

B) **Réponse c** : $\boxed{\text{la variable } T \text{ a bien pour densité } E(T) = 3, \text{ conformément au cahier des charges de l'usine}}$

En effet, f est une densité ssi :

- f est à valeurs positives ; c'est le cas puisque dans $[0, 6]$ on a bien $x(6-x) \geqslant 0$. Il faut juste que $\mu \geqslant 0$;
- $\displaystyle\int_0^6 f(t)\,\mathrm{d}t = 1$. Cela équivaut à $\displaystyle\int_0^6 f(t)\,\mathrm{d}t = \mu \int_0^6 (6t - t^2)\,\mathrm{d}t = \mu\left[6 \times \frac{6}{2} - \frac{6^3}{3}\right] = 1 \Leftrightarrow \mu \times 36 = 1 \Leftrightarrow \mu = \frac{1}{36}$.

d est donc fausse ($1/35$ au lieu de $1/36$), et a aussi.
Ensuite on a $\displaystyle E(T) = \int_0^6 t \times f(t)\,\mathrm{d}t = \mu \int_0^6 (6t^2 - t^3)\,\mathrm{d}t = \mu\left[6 \times \frac{6^3}{3} - \frac{6^4}{4}\right] = \mu \times 6^4 \times \frac{1}{12} = 6^2 \times \frac{1}{12} = 3$, ce qui est le chiffre annoncé pour la taille par le cahier des charges.

C) **Réponse a** : $\boxed{\text{l'échantillon permet de valider l'annonce de l'usine C}}$

L'intervalle de fluctuation s'écrit : $I = \left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}, p + 1,96\,\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$ ici avec $p = 0,95$ et $n = 200$ soit $I = \left[0,95 - 1,96 \times \frac{\sqrt{0,05 \times 0,95}}{\sqrt{200}}, 0,95 + \frac{\sqrt{0,05 \times 0,95}}{\sqrt{200}}\right] \approx [0,9198\ ;\ 0,9802]$. En multipliant par 200, on obtient l'intervalle : $[183,96\ ;\ 196,04]$
On peut constater que les composants ayant les bonnes valeurs de T, P, A sont dans cette fourchette.

Remarque : il demeure bien entendu une incertitude quant à savoir si ce sont les mêmes échantillons qui ont les bonnes valeurs de P, de T ou de A en même temps.

D) **Réponse b** : $\boxed{\dfrac{1}{91}}$

Le chiffre de 500 peut correspondre à :

Y	5	6	7	8	9	10
X	495	494	493	492	491	490
$X+Y$	500	500	500	500	500	500

soit 6 situations.

La probabilité de la première colonne est $p(Y=5 \cap X=495) = p(Y=5) \times p(X=495)$ par indépendance.

Or $p(Y=5) = \dfrac{1}{26}$ et $p(X=495) = \dfrac{1}{21}$ d'où la probabilité de la première colonne : $\dfrac{1}{26} \times \dfrac{1}{21}$.

La probabilité que 500 batteries soient sorties est ainsi $p(X+Y=500) = 6 \times \dfrac{1}{26} \times \dfrac{1}{21} = \dfrac{1}{91}$.

7 QCM alternatifs (de 0 à 4 réponses justes)

A) **α et β** sont justes.

B) **α,β et γ** sont justes.

α est juste : dans ce cas $p(0 \leqslant X \leqslant 1) = \dfrac{1}{2} p(-1 \leqslant X \leqslant 1) \approx \dfrac{1}{2} \times 0,6826 \approx 0,3413$.

Note : la valeur $p(-1 \leqslant X \leqslant 1) \approx 0,6826$ est à connaître par coeur.

β est juste : dans ce cas, $p(0 \leqslant X \leqslant 1) = p\left(\dfrac{2}{3} \leqslant X \leqslant 1\right) = \dfrac{1-\frac{2}{3}}{\frac{5}{3}-\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{3} \approx 0,33$.

γ est juste : dans ce cas, $p(0 \leqslant X \leqslant 1) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda}$. Il s'agit alors de savoir si :
$0,3 \leqslant 1 - \mathrm{e}^{-\lambda} \leqslant 4 \Leftrightarrow 0,6 \leqslant \mathrm{e}^{-\lambda} \leqslant 0,7 \Leftrightarrow \ln(0,6) \leqslant -\lambda \leqslant \ln(0,7)$.

δ est fausse : cet item est un exemple amusant de paradoxe insoluble. En effet, si on répond oui, cela veut dire que δ est fausse.

Si l'on répond non, cela veut dire que le nombre de réponses justes est $0, 1, 2$ (trois valeurs exclues) ou 4. Le lecteur intéressé pourra faire une recherche sur l'expression : « paradoxe du barbier ».

C) **α,β,γ** sont justes.

α est juste : lorsque $\lambda \to +\infty$, la largeur de l'intervalle tend vers 0 donc $f(\lambda)$ tend vers 0.

Ensuite, $p\left(\dfrac{1}{\lambda^2} \leqslant X \leqslant \dfrac{2}{\lambda^2}\right)$ est toujours plus petit que $p\left(\dfrac{1}{\lambda^2} \leqslant X\right)$ (intervalle plus restreint) qui tend vers 0 si $\dfrac{1}{\lambda^2} \to +\infty$. Par les gendarmes, on a donc $\lim\limits_{x \to 0} f(\lambda) = 0$.

β est juste : $f(\lambda) = p\left(\dfrac{1}{\lambda^2} \leqslant X \leqslant \dfrac{2}{\lambda^2}\right) = \mathrm{e}^{-\lambda \frac{1}{\lambda^2}} - \mathrm{e}^{-\lambda \frac{2}{\lambda^2}} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{\lambda}} - \mathrm{e}^{-\frac{2}{\lambda}}$.

La dérivée de cela est : $f'(\lambda) = \dfrac{1}{\lambda^2} \mathrm{e}^{-\frac{1}{\lambda}} - \dfrac{2}{\lambda^2} \mathrm{e}^{-\frac{2}{\lambda}} = \dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{2}{\lambda}}}{\lambda^2}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{\lambda}} - 2\right)$, nul pour $\mathrm{e}^{\frac{1}{\lambda}} = 2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{\lambda} = \ln 2 \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{1}{\ln 2}$, positif avant, négatif après.

γ est juste : la valeur maximale de $f(\lambda)$ est $f\left(\dfrac{1}{\ln 2}\right) = \mathrm{e}^{-\ln 2} - \mathrm{e}^{-2\ln 2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{4}$.

δ est fausse, vu le tableau de variations de f.

8 Familles, algo et récurrences

A) **Réponse b** : $\boxed{p(X=k+1) = \dfrac{n-k}{k+1} \times \dfrac{1-p}{p} \times p(X=k)}$:

$$\begin{aligned}
p(X=k+1) &= \binom{n}{k+1} p^{k+1} (n-p)^{n-k-1} \\
&= \frac{n(n-1) \times \ldots \times (n-k+1)(n-k)}{(k+1) \times k \times \ldots \times 1} p^{k+1} (1-p)^{n-k-1} \\
&= \frac{n(n-1) \times \ldots \times (n-k+1)}{k \times \ldots \times 1} \times \frac{n-k}{k+1} p^k \times p \times \frac{(1-p)^{n-k}}{1-p} \\
&= \frac{n(n-1) \times \ldots \times (n-k+1)}{k \times \ldots \times 1} \times p^k \times (n-p)^{n-k} \times \frac{p}{1-p} \times \frac{n-k}{k+1} \\
&= p(X=k) \times \frac{p}{1-p} \times \frac{n-k}{k+1}.
\end{aligned}$$

B) **Réponse** a : $\boxed{\text{les deux colonnes B et C vont présenter des valeurs numériques assez proches}}$
La colonne B affiche les valeurs de $p(X=k)$ où X suit la loi $\mathcal{B}(n=100; p=0,5)$.
La colonne C affiche les valeurs de $p\left(k-\frac{1}{2} \leqslant Y \leqslant k+\frac{1}{2}\right)$ où Y suit la loi $\mathcal{N}(\mu=50; \sigma^2=25)$.
Il faut savoir que, pour n assez grand, $\mathcal{B}(n;p)$ peut être approché par $\mathcal{N}(\mu=n\,p; \sigma^2=n\,p\,(1-p))$ ainsi a est juste.
B et C présentent des nombres croissants puis décroissants (courbe en cloche) donc b et c sont fausses.
d est totalement fantaisiste.

C) **Réponse** c : $\boxed{\text{la loi de } N \text{ est donnée par } p(N=k)=\left(\frac{5}{6}\right)^k \times \frac{1}{6}}$
Cet algorithme simule la loi géométrique tronquée avec $n=100$ et $p=\frac{1}{6}$: on tire un dé jusqu'à avoir un 6, mais on s'arrête au centième tirage même si l'on n'a eu aucun 6.
Il faut bien noter que la probabilité de n'avoir aucun 6 sur 100 tirages est quasiment nulle : $\left(\frac{5}{6}\right)^{100} \approx 10^{-8}$, ce qui rend la a totalement fausse.
La variable N, à la fin de l'algorithme, vaudra un entier entre 0 (si X vaut 6 la première fois) et 101 (si X ne vaut jamais 6, ce qui reste théorique).
b est juste, car un simple arbre montre que $p(N=k)=\left(\frac{5}{6}\right)^k \times \frac{1}{6}$, car $N=k$ lorsque l'on a tiré successivement k fois un entier dans $\{1;\ldots;5\}$ et une ultime fois un 6.
Il est conseillé au lecteur de suivre l'algorithme pas à pas pour le tirage suivant : $\{4,1,6\}$.

Remarque : en général, en théorie des probabilités, on écrit $p(N=k)=\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \times \frac{1}{6}$ car on définit N par le nombre de tirages total, y compris le dernier 6.

D) **Réponse** a : $\boxed{p_{n+1}=0,5\,p_n+0,2}$:

$$\begin{aligned}
p_{n+1} &= p(G_{n+1}) \\
&= p(G_{n+1}\cap G_n)+p(G_{n+1}\cap \overline{G_n}) \\
&= p(G_n)\times p_{G_n}(G_{n+1})+p(\overline{G_n})\times p_{\overline{G_n}}(G_{n+1}) \\
&= p_n \times 0,7+(1-p_n)\times(1-0,8) \\
&= 0,7\,p_n+1-0,8+0,8\,p_n-p_n \\
&= 0,5\,p_n+0,2.
\end{aligned}$$

E) **Réponse** b : $\boxed{(v_n) \text{ est géométrique de raison } q\neq 1}$:

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= p_{n+1}-0,4 \\
&= 0,5\,p_n+0,2-0,4 \\
&= 0,5\,p_n-0,2 \\
&= 0,5\,v_n.
\end{aligned}$$

F) **Réponse** b : $\boxed{\text{converge}}$
En effet elle est géométrique de raison $q\in\,]0,1[$.

9 Réflexion autour d'un thème mathématique

$\boxed{\text{Thème : } \textbf{deux variables aléatoires.}}$

A) **Réponse** c : $\boxed{\frac{9}{16}}$
En effet, $p(X=0)=\frac{3^2}{4^2}$.

B) **Réponse** c : $\boxed{\frac{9}{14}}$
En effet, la somme des coefficients annoncés est $4+1+9=14$ donc la loi de Y est :

y_i	-2	1	3
p_i	$\frac{4}{14}$	$\frac{2}{14}$	$\frac{9}{14}$

C) **Réponse** b : $\boxed{0{,}5}$
En effet, la loi est X est :

x_i	0	1	2
p_i	$\frac{9}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{1}{16}$

et donc $E(X) = 0 + 1 \times \dfrac{6}{16} + 2 \times \dfrac{1}{16} = \dfrac{8}{16} = \dfrac{1}{2}$.

D) **Réponse** a : $\boxed{\dfrac{3}{112}}$
Si $X = Y$ alors forcément $X = Y = 1$ donc : $p(X = Y) = p(X = 1 \text{ et } Y = 1) = p(X = 1) \times p(Y = 1)$ par indépendance de X et Y. On trouve alors $p(X = Y) = \dfrac{1}{14} \times \dfrac{6}{16} = \dfrac{3}{112}$.
E) **Réponse** a : $\boxed{0{,}3}$
$p(0 \leqslant Y \leqslant 9) = p(0 \leqslant X \leqslant 3) = \dfrac{3}{10}$.
F) **Réponse** d : $\boxed{\text{aucune des trois}}$
a est fausse, car :
$p(0 \leqslant Z \leqslant 9) = p(0 \leqslant Y + 1 \leqslant 9) = p(-1 \leqslant Y \leqslant 8) = p(0 \leqslant Y \leqslant 8) = p\left(0 \leqslant X \leqslant \sqrt{8}\right) = \dfrac{\sqrt{8}}{10}$.
$p(1 \leqslant Z \leqslant 10) = p(1 \leqslant Y + 1 \leqslant 10) = p(0 \leqslant Y \leqslant 9) = p(0 \leqslant X \leqslant 3) = \dfrac{3}{10}$.
b est fausse aussi d'après le calul précédent.
c est fausse, car :
$p(0 \leqslant Z \leqslant 1) = p(0 \leqslant Y + 1 \leqslant 1) = p(-1 \leqslant Y \leqslant 0) = 0$ car $Y \geqslant 0$ puisque $Y = X^2$.
$p(9 \leqslant Z \leqslant 10) = p(9 \leqslant Y + 1 \leqslant 10) = p(8 \leqslant Y \leqslant 9) = p\left(\sqrt{8} \leqslant X \leqslant 3\right) = \dfrac{3 - \sqrt{8}}{10} \neq 0$.
G) **Réponse** b : $\boxed{\text{pour } 0 \leqslant a \leqslant b \leqslant 1, \text{ on a } p(a \leqslant S \leqslant b) = \frac{\pi}{4}(b^2 - a^2)}$
a est fausse, car X^2 comme Y^2 peut prendre toutes les valeurs de $[0, 1]$ et, vu que X et Y sont indépendantes, $\sqrt{X^2 + Y^2}$ peut prendre toutes les valeurs de $\left[0, \sqrt{2}\right]$.
b est juste, car, comme indiqué sur la figure suivante, $p(a \leqslant S \leqslant b) = \dfrac{\frac{1}{2} \times \pi(b^2 - a^2)}{2}$, où le numérateur $\dfrac{1}{2} \times \pi(b^2 - a^2)$ représente l'aire de la demi-couronne, et où le dénominateur 2 représente l'aire du rectangle.

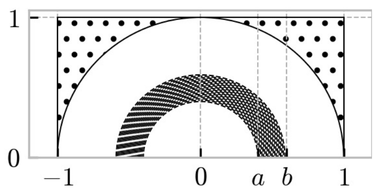


Figure 14.3.

c est fausse, car $p(S \geqslant 1)$ correspond à l'aire marquée par des points ci-dessus qui est visiblement inférieure à la moitié de celle du rectangle. Plus précisément : $p(S \geqslant 1) = \dfrac{2 - \pi/2}{2} = 1 - \dfrac{\pi}{4} < \dfrac{1}{2}$.

10 Rédactions d'élèves imaginaires...

A) Réponses :
α) | | **F** |
Il fallait dire : « La loi de probabilité de X est.. »
β) | | **F** |
Cela n'a aucun sens, $p(X > 0) = 50\ \%$ quand même, ce n'est pas rien.
γ) | | **F** |
Non ce sont les mêmes, car c'est une loi continue.
δ) | | **F** |
Non, de toute manière $p\left(\dfrac{1}{2}\right)$ ne désigne rien du tout.

B) Réponses :

α) | **V** | |

β) | | **F** |

Déjà, on ne peut pas faire de la divination ; ensuite la fréquence probable des 9 sera plutôt $\frac{4}{36} = \frac{1}{4}$, ce qui nous conduirait à plutôt 3000 occurences de 9 en moyenne.

γ) | | **F** |

Une somme 7 est plus probable qu'une somme 12.

δ) | | **F** |

Le calcul est bon : 65 est l'espérance de la variable « somme des 10 nombres » puisque $6,5$ est l'espérance de X. Mais la somme obtenue ne vaudra pas forcément toujours exactement 65.

C) Réponses :

α) | | **F** |

C'est imprécis, on ne parle pas de moyenne (réservée à des grandeurs « concrètes ») mais d'espérance (= moyenne « probable »).

β) | | **F** |

Cela ne veut rien dire, « X » en soi n'est pas un événement. On ne peut parler que de la probabilité de $X = k$ pour k donné, mais jamais de la probabilité de X tout seul, X désignant une variable aléatoire.

γ) | | **F** |

$\sigma = 10 \times 0,1 \times 0,9$.

δ) | **V** | |

D) Réponses :

α) | | **F** |

Non car $p(X = 0) = 0$, c'est une variable continue.

β) | | **F** |

Non car $p(0 \leqslant X \leqslant 1) = \frac{1}{2} p(-1 \leqslant X \leqslant 1) = 0,3413$.

γ) | **V** | |

Oui c'est écrit dans l'énoncé.

δ) | | **F** |

Non, $[p(X \neq 0) = 1]$. Bien méditer là-dessus.

11 Exercices avec graphiques

A) **Réponse c** : $\boxed{p(-0,5 \leqslant X \leqslant 0) \geqslant 0,375}$

a est fausse, car une probabilité ne peut être supérieure ou égale à 1 que si elle est égale à 1, or l'intervalle $[0; 0,25]$ ne peut à lui tout seul couvrir la surface infiniment large sous la courbe.

b est fausse, car on voit bien sur la figure que $p(X \geqslant 0)$ est plus grand que $p(X \leqslant 0)$. On peut compter les carreaux par défaut et par excès pour s'en assurer.

c est juste : $p(-0,5 \leqslant X \leqslant 0)$ correspond visuellement à un carreau plus une fraction qui est plus grande que la moitié d'un carreau. Or chaque carreau, ayant pour côté 0,5, a pour aire $0,5^2 = 0,25$. Tout ce qu'on peut dire de $p(-0,5 \leqslant X \leqslant 0)$ par lecture graphique, c'est que que ce nombre est plus grand que $0,25 + 0,25 \times \frac{1}{2} = 0,375$.

d est fausse : $p\left(\frac{1}{2} < X < 1\right)$ correspond à moins de deux carreaux, donc $p\left(\frac{1}{2} < X < 1\right) < 0,25 \times 2 = 0,5$.

B) **Réponse c** : $\boxed{\frac{1}{12}}$

a est fausse : l'énoncé indique que $p_{R_1}(V) = \frac{3}{4}$ donc $p_{R_1}(R_3) = \frac{1}{4}$.

b est fausse : $p_{R_3}(R_1) = \frac{p(R_1 \cap R_3)}{p(R_3)} = \frac{p(R_1) \times p_{R_1}(R_3)}{p(R_3)} = \frac{1/3 \times 1/4}{p(R_3)}$ et là, il faut calculer $p(R_3)$.

On a $p(R_3) = p(R_3 \cap R_1) + p(R_3 \cap R_2) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12} + \frac{2}{9} = \frac{11}{36}$.

c est juste, car la loi de X est la suivante :

x_i	10,5 $(S - R_1 - V)$	11 $(S - R_1 - R_3 - V)$	10 $(S - R_2 - V)$	10,5 $(S - R_2 - R_3 - V)$
p_i	$\frac{1}{3} \times \frac{3}{4}$	$\frac{1}{3} \times \frac{1}{4}$	$\frac{2}{3} \times \frac{2}{3}$	$\frac{2}{3} \times \frac{1}{3}$

Donc $p(X = 11) = \frac{1}{12}$ et $p(X = 10,5) = \frac{17}{36}$.

Chapitre 15

Énoncés - Espace

1 Révisions immédiates du cours

On considère les points $A(-2;0;-4), B(0,-2,-4), C(2,-4,-5)$.

A) Un système d'équations paramétriques de la droite (AB) est :

a	b	c	d
$\begin{cases} x=3t-1 \\ y=-3t-3 \\ z=0, t\in\mathbb{R} \end{cases}$	$\begin{cases} x=2t-1 \\ y=-2t-1 \\ z=-4, t\in\mathbb{R} \end{cases}$	$\begin{cases} x=t+2 \\ y=t+4 \\ z=-4, t\in\mathbb{R} \end{cases}$	aucune des trois

B) La longueur AB est égale à :

a	b	c	d
$2\sqrt{2}$	$4\sqrt{2}$	$6\sqrt{2}$	aucune des trois

C) Une équation du plan (ABC) est :

a	b	c	d
$2x+2y-z=0$	$-9x-4y+5z=0$	$-2x-2y-4=0$	$x+y-2=0$

D) Une équation du plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}(-2;-3;-1)$ est :

a	$-2x-3y-z=0$
b	$-2x-3y-z=-2\times(-2)-3\times 0-1\times(-4)$
c	$6x+y-3z=0$
d	une telle équation ne peut être définie car plusieurs plans vérifient ces conditions

E) $x^2+y^2+z^2+4y+8z=-16$ est l'équation :

a	de l'ensemble vide
b	d'une sphère de centre $U(0;2;4)$
c	d'une sphère de rayon 4
d	aucune des trois

F) Le produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{v}$, avec $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\m\\k\end{pmatrix}$ et $m,k\in\mathbb{R}$, est nul si et seulement si :

a	b	c	d
$m=-1$	m indifférent et $k=-6$	$m=-6$ et $k=-1$	$m=-6$ et k indifférent

G) Si D_1, D_2, D_3 sont des droites vérifiant :

- D_1 strictement parallèle à D_2 et :
- D_2 sécante avec D_3 alors :

a	forcément D_1 sécante avec D_3
b	forcément $D_1 \parallel D_3$
c	forcément D_1 et D_3 sont non-coplanaires
d	aucune des trois réponses n'est juste

H) On donne les trois droites $D\colon \begin{cases} x = 2-t \\ y = 3+2t \\ z = -t \end{cases}$, $G\colon \begin{cases} x = t-2 \\ y = -3+2t \\ z = -1 \end{cases}$, $F\colon \begin{cases} x = 4+4t \\ y = 4-8t \\ z = 4+4t \end{cases}$, toutes trois paramétrées par $t \in \mathbb{R}$. Alors :

a	b	c	d
$D \parallel E$	$E \parallel F$	$D \parallel F$	aucune des trois

I) On donne les deux droites $D\colon \begin{cases} x = 2-t \\ y = 3+2t \\ z = -t \end{cases}$, $E\colon \begin{cases} x = 6t-2 \\ y = 4+2t \\ z = -1 \end{cases}$, pour $t \in \mathbb{R}$. Alors :

a	$D \parallel E$
b	D et E non-coplanaires
c	D et E sécantes
d	aucune des trois

J) On considère les deux plans suivants :

$$\begin{cases} P_1\colon 2x+y-3z+1=0 \\ P_2\colon x-y+2=0 \end{cases}.$$

Alors le plan contenant O et contenant la droite Δ d'intersection de P_1 et de P_2 a pour équation :

a	b	c	d
$x+y-2z=0$	$x+y=0$	$2x+y-3z=0$	$x+y+z+3=0$

K) L'intersection des trois plans $P\colon x+y=0$, $Q\colon x+z=0$, $R\colon y+z=0$ est :

a	b	c	d
une droite	l'ensemble vide	un point	trois droites parallèles

L) Soient A, B, C trois sommets d'un cube. Alors l'intersection du cube avec le plan (ABC) est forcément :

a	un carré et rien d'autre
b	soit un carré, soit un rectangle de rapport $\dfrac{L}{\ell} = \sqrt{2}$, mais rien d'autre
c	soit un carré, soit un rectangle de rapport $\dfrac{L}{\ell} = \sqrt{2}$, soit un triangle équilatéral mais rien d'autre
d	aucune des trois

M) Soient P, Q, R trois plans de l'espace et $S = P \cap Q \cap R$ leur intersection. Alors :

a	S peut être vide
b	S est réduit à un point
c	S est forcément une droite
d	si $P \parallel Q$, alors S est la réunion de deux droites parallèles

2 Premières applications

A) On donne $A(-2;0;-4)$ et $B(0;-2;-4)$. Alors une équation du plan P médiateur de $[AB]$ est :

a	b	c	d
$2x-2y+z=3$	$x+y=0$	$x=y$	aucune des trois

B) Mêmes A et B. On pose $C(0, a, 0)$ où $a \in \mathbb{R}$. Les valeurs de a pour lesquelles ABC est un triangle rectangle sont :

a	b	c	d
-2 et 2	4	$-1{,}0$ et 1	aucune des trois

C) Mêmes A et B. L'intersection de la sphère de centre A, rayon $\sqrt{2}$ et du plan médiateur de $[AB]$ est :

a	b	c	d
vide	un point	un cercle de rayon $\sqrt{5}$	aucune des trois

D) On donne $\vec{u}(2;3;0)$, $\vec{v}(-1;0;4)$, $P\colon 2x+3y=6$ et $Q\colon 4x+y+z=1$. Alors :

Alors :

a	b	c	d
$\vec{u}\perp\vec{v}$	$P \parallel Q$	$\vec{u}$ normal à P	aucune des trois

E) On donne $P\colon 2x-y-z=1$ et $Q\colon x+z=0$, alors la droite d'intersection de P et Q est :

a	b	c	d
$D\colon \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1+t \\ y &=& 1+t \\ z &=& 1+t \\ & & t\in\mathbb{R}\end{array}\right.$	$D\colon \left\{\begin{array}{rcl} x &=& -2t \\ y &=& -3t \\ z &=& -t-1 \\ & & t\in\mathbb{R}\end{array}\right.$	$D\colon \left\{\begin{array}{rcl} x &=& t \\ y &=& 3t-1 \\ z &=& -t \\ & & t\in\mathbb{R}\end{array}\right.$	pas de droite d'intersection car P et Q sont confondus

F) Soit D une droite ne passant pas par O. Combien existe-t-il de plans contenant à la fois D et O ?

a	on ne peut pas le dire, cela dépend de D et de O
b	aucun
c	un seul
d	plusieurs

G) On donne les plans et droites suivants, où a,b,c,m désignent des réels fixés :

$$P_1\colon 2x-2y+5=0,\ P_2\colon a\,x+4y+b\,z+m=0,$$

$$D_1 : \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 3t-1 \\ y &=& -3t+1 \\ z &=& -3 \\ & & t\in\mathbb{R}\end{array}\right.,\ D_2 : \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2t-1 \\ y &=& 2t+1 \\ z &=& c\,t-3 \\ & & t\in\mathbb{R}\end{array}\right..$$

Alors :

a	il y a une infinité de valeurs de (a,b) pour lesquelles $P_1 \parallel P_2$
b	il y a une infinité de valeurs de c pour lesquelles $D_1 \perp D_2$
c	il y a une infinité de valeurs de c pour lesquelles $D_1 \parallel D_2$
d	il y a une unique valeur du couple (a,b) pour laquelle $P_1 \perp P_2$

H) Soit $[C]$ le cube dont les sommets sont les huit points $\left(\pm\frac{1}{2};\pm\frac{1}{2};\pm\frac{1}{2}\right)$.

Soit S (respectivement S') la sphère de centre O et de rayon $\frac{1}{2}$ (respectivement 1).

Alors :

a	le volume de $[C]$ est la moitié du volume de $[C']$ formé des points $(\pm1;\pm1;\pm1)$
b	le volume de $[C]$ est égal à $1/8$
c	l'intersection de S avec les faces de $[C]$ est constituée de 8 points
d	le volume de S est environ 4 fois plus petit que le volume de $[C]$

I) On considère la droite D d'équation : $\left\{\begin{array}{l} x+y+z=3 \\ x-2y+z=0 \end{array}\right.$.

Un système d'équations paramétriques de D est :

a	b	c	d
$D\colon \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1+t \\ y &=& 1-2t \\ z &=& 1+t \\ & & t\in\mathbb{R}\end{array}\right.$	$D\colon \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2+t/3 \\ y &=& 1+t/3 \\ z &=& 2+t/3 \\ & & t\in\mathbb{R}\end{array}\right.$	$D\colon \left\{\begin{array}{rcl} x &=& a-t \\ y &=& 1 \\ z &=& -a+2+t \\ & & t\in\mathbb{R}\end{array}\right.$ avec $a\in\mathbb{R}$ quelconque	$D\colon \left\{\begin{array}{rcl} x &=& b+4t \\ y &=& b \\ z &=& 3-2b-4t \\ & & t\in\mathbb{R}\end{array}\right.$ avec $b\in\mathbb{R}$ quelconque

J) On considère la droite D d'équation $D\colon \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1-t \\ y &=& 2-2t \\ z &=& 3-3t \\ && t\in\mathbb{R}\end{array}\right.$.

Un système d'équations cartésiennes de D est :

a	b	c	d
$D\colon \left\{\begin{array}{l} x+y+z=6 \\ x+y-z=0\end{array}\right.$	$D\colon \left\{\begin{array}{l} x+y+z=-6t \\ x+y-z=0 \\ t\in\mathbb{R}\end{array}\right.$	$D\colon \left\{\begin{array}{l} -2x+y=0 \\ -3x+y+z=0\end{array}\right.$	$D\colon \left\{\begin{array}{l} -5x+y+z=0 \\ x+y-z=0\end{array}\right.$

K) Une équation d'un plan passant par $L(2;-1;3)$ et perpendiculaire à $P\colon 2x-3y+z=-4$ est :

a	b	c	d
$\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y+z=\frac{13}{3}$	$y+3z=8$	$-x+2z=-4$	aucune des trois

L) Soient D, D' deux droites non coplanaires.

Soit M (respectivement M') un point de D (respectivement de D').

Soient P un plan contenant la droite (MM'), et Q (respectivement Q') un plan contenant D (respectivement D'). Alors :

a	on peut choisir M, M', P de manière à ce que P soit perpendiculaire à la fois à D et à D'
b	on peut choisir M, M', P de manière à ce que D et D' soient incluses dans P
c	on peut choisir, M, M', Q, Q' de manière à ce que $Q\cap Q'$ soit non vide
d	il est impossible de trouver M, M', P, Q tels que $P\perp Q$

3 Questions de logique

A) Soit S la sphère de centre O et de rayon 1. Soit P le plan d'équation $z=0$. Soit $M(x,y,z)$ un point de l'espace. Alors je peux dire que :

a	$MO\geqslant 1 \Leftrightarrow M\in P$
b	$x^2+y^2=1 \Rightarrow M\in P\cap S$
c	$M\in P\cap S \Rightarrow x^2+y^2=1$
d	$[M\in S$ et $d(M,P)=1] \Leftrightarrow x=y=0$ où $d(M,P)$ désigne la distance entre le point M et le plan P

B) Soient $\vec{u}\neq\vec{0}$ un vecteur, P un plan de vecteur normal $\vec{u}$, A et B deux points de l'espace. Alors :

a	quel que soit le point M, $\overrightarrow{AM}\perp\vec{u}$
b	$M\in P \Leftrightarrow \left[\overrightarrow{AM}\perp\vec{u} \text{ et } A\in P\right]$
c	l'ensemble de tous les points M tels que $\overrightarrow{AM}\perp\vec{u}$ est le plan P
d	$A, B\in P \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\vec{u}=0$

C) Soient D une droite de l'espace et $\Omega, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$ six points distincts.

Soit k le nombre de points parmi les A_i tels que $\overrightarrow{\Omega A_i}\perp D$. Alors :

a	si A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 forment un pentagone régulier de centre Ω, alors $k\in\{0,1,5\}$
b	si $k=4$ forcément A_1, A_2, A_3, A_4 forment un carré
c	si tous les points A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 sont alignés, alors $0<k<5$
d	si A_1, A_2, A_3 forment un triangle équilatéral de centre Ω, alors $k\geqslant 3$

4 Questions en tableaux

Voici un cube de côté 1 :

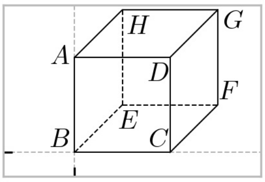


Figure 15.1.

A)On peut affirmer que :	a	$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=AC^2$
	b	$\overrightarrow{HD}\cdot\overrightarrow{DE}>0$
	c	$\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{BE}=-BE^2$
	d	$\overrightarrow{DG}\cdot\overrightarrow{EG}=0$
B)Le triangle AGC a pour aire :	a	$\sqrt{3}/2$
	b	$\sqrt{3}/4$
	c	$\sqrt{2}/3$
	d	$\sqrt{2}/4$
C)Dans le repère $\left(E,\overrightarrow{EB},\overrightarrow{EF},\overrightarrow{EH}\right)$:	a	$C(-1,1,0)$
	b	$\overrightarrow{FD}(1,0,1)$
	c	$AF=\sqrt{2}$
	d	$AHEB$ a pour aire 4

On considère le tétraèdre quelconque non aplati $ABCD$:

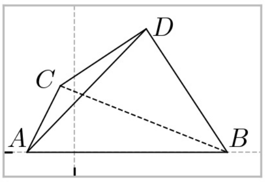


Figure 15.2.

s		alors...
D) Il y a un unique point Q dans le plan (ABC) tel que (DQ) soit perpendiculaire au plan (ABC). Ce point Q est :	a	l'intersection des médiatrices de ABC
	b	l'intersection des médianes de ABC
	c	l'intersection des hauteurs de ABC
	d	aucune des trois
E) Il y a un unique point Q dans le plan (ABC) tel que $\overrightarrow{DR}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}\right)$. Ce point R est :	a	l'intersection des médiatrices de ABC
	b	l'intersection des médianes de ABC
	c	l'intersection des hauteurs de ABC
	d	aucune des trois
F) On suppose que le tétraèdre est régulier (ses faces sont des triangles équilatéraux). Alors un seul de ces quatre nombres est positif :	a	$\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AD}$
	b	$\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{AB}$
	c	$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DB}$
	d	$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{AD}$

5 Questions Vrai/Faux

On donne $A\left(t;-1+\sqrt{2};2\right)$, $B\left(3;-1-\sqrt{2};4\right)$ et $C(2;-1;3)$. On définit les deux ensembles de ponts suivants :

- Σ l'ensemble des points $M(x,y,z)$ vérifiant :
  $(x-1)(x-3)+\left(y+1-\sqrt{2}\right)\left(y+1+\sqrt{2}\right)+(z-2)(z-4)=0.$
- Π l'ensemble des points $M(x,y,z)$ vérifiant :
  $x-y+z\sqrt{2}=3\sqrt{2}-1.$

Alors :

A) Σ est une sphère dont un diamètre est $[AB]$. **V** □ **F** □

B) Le point $H\left(1;0;3-\sqrt{2}\right)$ est à la fois sur Σ et sur Π. **V** □ **F** □

C) Π est un plan et $\overrightarrow{CH}$ est un vecteur normal à Π. **V** □ **F** □

D) Π est tangent à Σ. **V** □ **F** □

On considère le cube formé des points $(\pm 1;\pm 1;\pm 1)$.

Alors :

E) L'extérieur du cube est caractérisé par la relation : $\begin{cases} x^2>1 \\ \text{ET} \\ y^2>1 \\ \text{ET} \\ z^2>1 \end{cases}$. **V** □ **F** □

F) L'extérieur du cube est caractérisé par la relation : $\begin{cases} x^2>1 \\ \text{OU} \\ y^2>1 \\ \text{OU} \\ z^2>1 \end{cases}$. **V** □ **F** □

G) Soient $A_1,\dots,A_8$ les sommets de ce cube et soit D l'ensemble de toutes les distances possibles entre deux points distincts A_i et A_j. Alors $D=\left\{2;2\sqrt{2};2\sqrt{3}\right\}$. **V** □ **F** □

H) Si je choisis trois sommets parmi les huits de ce cube, alors il y en a toujours deux qui sont séparés par une arête seulement. **V** □ **F** □

Autour de quelques droites.

I) L'ensemble des points $M(x,y,z)$ pour lesquels il existe $k\in[0;2]$ vérifiant le système $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \\ z\in\mathbb{R} \end{cases}$ est le segment $[AB]$, où $A(1;2;-1)$ et $B(5;0;5)$. **V** □ **F** □

J) La droite d'équation paramétrique $\begin{cases} x=2k+1 \\ y=-k+2 \\ z=3k-1 \end{cases}$ $(k\in\mathbb{R})$, est perpendiculaire au plan d'équation cartésienne $2x-y+3=1$. **V** □ **F** □

K) L'ensemble des points $M(x,y,z)$ vérifiant le système $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \\ z\in\mathbb{R} \end{cases}$ est une droite. **V** □ **F** □

L) Les trois droites $D_1 : \begin{cases} x=a+t \\ y=b+t \\ z=c+t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$ $D_2 : \begin{cases} x=2+t \\ y=2 \\ z=2-t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$
$D_3 : \begin{cases} x=1+at \\ y=1+bt \\ z=1+ct \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$ sont concourantes pour $a=2, b=1, c=0$. **V** □ **F** □

On considère trois points distincts A, B, C et l'on pose $a = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Alors :

M) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} = -a$. **V** ☐ **F** ☐

N) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = -a$. **V** ☐ **F** ☐

O) $a^2 - AB^2 \times AC^2 = AB^2 \times AC^2 \times \sin^2\big(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\big)$. **V** ☐ **F** ☐

P) $AB \times AC = |a| \Leftrightarrow A, B, C$ alignés. **V** ☐ **F** ☐

Soient A, B deux points de l'espace, et $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ trois vecteurs de l'espace qui ne sont pas colinéaires deux à deux.

Alors :

Q) Il y a toujours une valeur, unique, de (α, β) telle que $\overrightarrow{AB} = \alpha\,\vec{u} + \beta\,\vec{v}$. **V** ☐ **F** ☐

R) Il y a toujours une valeur, unique, de (α, β, γ) telle que $\overrightarrow{AB} = \alpha\,\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}$. **V** ☐ **F** ☐

S) Le nombre de valeurs de (α, β, γ) telles que $\overrightarrow{AB} = \alpha\,\vec{u} + \beta\,\vec{v} + \gamma\,\vec{w}$
peut être nul, il peut être infini, il peut être égal à 1. **V** ☐ **F** ☐

T) Si $(0, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est un repère, alors $(0, \vec{w}, \vec{v}, \vec{u})$ en est un aussi et si l'on connaît les coordonnées de AB dans $(0, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, alors il est possible de les connaître dans le repère $(0, \vec{w}, \vec{v}, \vec{u})$. **V** ☐ **F** ☐

On considère le système (S) : $\begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ -3x + y + 2z = -3 \\ 2x - 3y + z = 2 \end{cases}$.

On appelle P le plan d'équation $x + 2y - 3z = 1$ et D la droite définie par le système suivant :

$$D : \begin{cases} -3x + y + 2z = -3 \\ 2x - 3y + z = 2 \end{cases}.$$

Alors :

U) Le système (S) admet comme solution le point $R(2;1;1)$. **V** ☐ **F** ☐

V) La droite D est contenue dans le plan P. **V** ☐ **F** ☐

W) Le système $\begin{cases} x - y = 1 \\ y - z = 0 \end{cases}$ est un autre système qui permet de définir la droite D. **V** ☐ **F** ☐

X) Le vecteur $\vec{k}(2;1;1)$ est un vecteur directeur de la droite D. **V** ☐ **F** ☐

6 Questions ++

A) On donne $A(1,1,1), B(0,1,2), \vec{f}(1,-1,1), \vec{g}(2,0,2)$. Soit X l'ensemble des points M qui vérifient $\overrightarrow{AM} = \alpha\,\vec{f} + \beta\,\vec{g}$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors :

a	X est une droite
b	le vecteur $\vec{f}$ est élément de X
c	le plan Q d'équation $x = z$ est strictement contenu dans X
d	pour tout $M \in X$, $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{AB}$

B) Soient $A(1,1,1), B(0,1,2)$ deux points, m un réel quelconque, et P_m le plan passant par A, B et par $Z_m(0,0,m)$. Soit enfin Y_m l'ensemble des vecteurs normaux au plan P_m.

a	Y_m est constitué du seul vecteur $\overrightarrow{u_m}(1, m-2, 1)$
b	les vecteurs de Y_4 sont ortogonaux aux vecteurs de Y_{-1}
c	il y a une valeur de m pour laquelle A, B, Z_m sont alignés et pour laquelle, donc, P_m n'est pas défini
d	supposons $m \neq 2$, soient $\vec{u} \in Y_2$ et $\vec{v} \in Y_m$; alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas orthogonaux

C) Soient D une droite de vecteur directeur donné $\vec{u}$, A un point de D, puis M un point quelconque, P le plan perpendiculaire à D et contenant M, et enfin H l'intersection de D et de P. Alors, lorsque A varie sur D et lorsque, en même temps, M varie dans l'espace, il existe un réel k vérifiant :

a	$\vec{u}\cdot\overrightarrow{AM}=k\,AM\times MH$
b	$\vec{u}\cdot\overrightarrow{AM}=k\,AH$
c	$\left\lvert\vec{u}\cdot\overrightarrow{AM}\right\rvert=k\,AH$
d	$MH=k\,\\|\vec{u}\\|$

D) Soit S une sphère tangente à un plan Q. Soient r le rayon de la sphère et Y son centre. Soit K un point tel que $K\in S$. Alors :

a	la distance entre le point K et le plan Q est inférieure ou égale à r
b	soit M un point ; si $YM\geqslant r$ alors le plan Q sépare Y et M
c	tous les points de la sphère sont à une distance inférieure ou égale à $2r$ du plan Q
d	tout point situé à une distance inférieure ou égale à $2r$ du plan Q est soit à l'intérieur de la sphère, soit sur la sphère

E) Dans un cube de côté a, soit A sur une arête et B sur une arête parallèle à l'arête contenant A. On suppose que ni A ni B n'est confondu avec un sommet du cube.
Soit $[CD]$ une arête du cube ne contenant ni A ni B. Alors :

a	forcément $AB<a\sqrt{2}$
b	il est possible de choisir A,B,C,D tels que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=-a^2$
c	il est possible de choisir A,B,C,D tels que $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=-a^2$
d	parmi les quatre angles suivants : $(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})$, $(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD})$, $(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DA})$, $(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB})$, si trois sont droits alors les quatre points A,B,C,D forment un rectangle

F) Soit U l'ensemble d'équation $x=y=0$. Soit $C\in U$. Soit V la droite passant par $R(1,1,0)$ et de vecteur directeur $\vec{n}(0,0,1)$. Alors :

a	U et V sont d'intersection non vide
b	U est une réunion de deux plans
c	l'ensemble de toutes les droites passant par C, sécantes avec U, et perpendiculaires à U est un plan parallèle à V
d	l'ensemble de toutes les droites passant par C et sécantes avec V est un plan contenant V

7 QCM alternatifs (de 0 à 4 réponses justes)

A) La distance AB vaut $\sqrt{3}$ pour :

α	$A(1,1,1)$ et $B(0,0,0)$
β	$A(0,0,3)$ et $B(0,0,0)$
γ	ABC rectangle en C avec avec $AC=\sqrt{2}$ et $BC=1$
δ	B un point de la sphère d'équation $(x-x_A)^2+(y-y_A)^2+(z-z_A)^2=3$

B) L'objet $\mathcal{K}$ d'équation $(x^2-1)(y^2-1)(z^2-1)=0$:

α	est un cube
β	s'inscrit dans une certaine sphère de centre O
γ	contient un nombre fini de points
δ	contient le segment $[AB]$ avec $A(-1,1,1)$ et $B(-1,1,-1)$

C) L'objet d'équation $|x^2-1|+|y^2-1|+|z^2-1|=0$:

α	est un cube
β	s'inscrit dans une certaine sphère de centre O
γ	contient un nombre fini de points
δ	contient le segment $[AB]$ avec $A(-1,1,1)$ et $B(-1,1,-1)$

D) Soit quatre points distincts A,B,C,D, tels que $AB=AC=AD=a$ où a est un réel donné. On suppose que $\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{BC}$.

Alors :

α	forcément $BD\leqslant a$
β	si A,B,C sont fixes, l'ensemble de tous les points D possibles forme un cercle
γ	si $\overrightarrow{AD}$ est orthogonal au plan (ABC) alors $DB=DB=a\sqrt{2}$
δ	si A,B,C,D sont coplanaires et si $BC=a$ alors $DB=DC=a\sqrt{2-\sqrt{3}}$

E) Le point A est strictement à l'intérieur de la sphère (S_1) $x^2+y^2+(z+1)^2=4$ et strictement à l'extérieur de la sphère (S_2) $x^2+y^2+(z-1)^2=4$. Alors A peut être :

α	$A(0,0,0)$
β	$A(0,0,-2)$
γ	$A(a,2,b)$ avec $a,b\in\mathbb{R}$ bien choisis
δ	en un unique point du cylindre d'axe (Oz) et de rayon 2

8 Sommations, familles de fonctions, tableurs, récurrences, algos

On revient ici au principe « une seule réponse juste ».

A) On définit la suite de points $(A_n(x_n,y_n,z_n))$ par $A_0(0,0,1)$ et pour tout $n\geqslant 0$:

$$A_{n+1}=\left(x_n+\frac{1}{2^{n+1}},0,z_n-\frac{1}{2^{n+1}}\right).$$

Alors :

a	pour tout $n\in\mathbb{N}$, $A_n\left(1-\frac{1}{2^n},0,1-\frac{1}{2^n}\right)$
b	la longueur ℓ_n de la ligne brisée $A_0A_1\ldots A_n$ converge vers $\ell=1+\sqrt{2}$ lorsque $n\to+\infty$
c	le produit scalaire $\overrightarrow{OA_n}\cdot\overrightarrow{OA_{n+1}}$ converge vers -1 lorsque $n\to+\infty$
d	trois points consécutifs quelconques de la suite (A_n) sont toujours alignés

B) Soient un point $B(0,0,7)$ et un entier $n\geqslant 1$.

Soit P_n le plan passant par O, par B et par $K_n\left(n,\frac{1}{n},0\right)$.

Soit $\vec{u_n}$ un vecteur normal à P_n.

Sur un tableur, on a déjà rempli les cellules suivantes : `B1=1` et `C1=1`, et l'on veut afficher les coordonnées d'un $\vec{u_n}$ possible dans les colonnes `D,E,F`, c'est-à-dire avoir : $\vec{u_1}$(`D1,E1,F1`).

On hésite entre les quatre possibilités suivantes que l'on recopiera ensuite vers le bas :

α)	`B2=B1+1`	`C2=C1/(C1+1)`	`D1=-C1`	`E1=B1`	`F1=0`
β)	`B2=B1+1`	`C2=C1/(C1+1)`	`D1=-C1`	`E1=B$1`	`F1=0`
γ)	`B2=B1+1`	`C2=1/B2`	`D1=-C$1`	`E1=B1^2`	`F1=0`
δ)	`B2=B1+1`	`C2=1/B$1`	`D1=B1`	`E1=C1`	`F1=0`

Parmi ces propositions :

a	aucune n'est valable
b	une seule est valable
c	deux exactement sont valables
d	toutes sont valables

C) On définit la suite de points $(B_n(x_n, y_n, n))$ par $\begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 0 \end{cases}$ et, pour tout $n > 0$:

$$x_{n+1} + \mathrm{i}\, y_{n+1} = \mathrm{i}(x_n + \mathrm{i} y_n),$$

où i désigne l'unité des imaginaires purs ($\mathrm{i}^2 = -1$). Alors :

a	pour tout $n \geqslant 0$, le point B_n a pour coordonnées : $B_n\left(\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right), \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right), 0\right)$
b	pour tout $n \geqslant 0$, la distance $B_n B_{n+1}$ vaut $\sqrt{3}$
c	pour tout $n \geqslant 0$, on a $\overrightarrow{B_n B_{n+1}} \perp \overrightarrow{B_{n+1} B_{n+2}}$
d	aucune des trois

9 Réflexion autour de quelques thèmes mathématiques

Thème : **la distance entre deux objets**.

A) L'ensemble des points situés à une distance 2 du point $P(0, 2, 4)$ est :

a	une sphère passant par P
b	un plan tangent à la sphère de centre P et de rayon 2
c	la sphère de diamètre $[RU]$ avec $R(2, 2, 4)$ et $U(-2, 2, 4)$
d	aucune des trois

B) L'ensemble des points situés à une distance 2 du plan $Z: x + y + z = 1$ est :

a	une sphère tangente à Z
b	une droite parallèle à Z
c	un plan parallèle à Z
d	aucune des trois

C) On considère $A(2, 3, 9), B(0, 4, 5), C(2, 0, 3)$. Alors la distance entre A et la droite (BC) est :

a	**b**	**c**	**d**
$\sqrt{21}$	$\sqrt{22}$	$\sqrt{23}$	$2\sqrt{6}$

D) On considère $A(1, 0, 1), B(2, -4, -1), C(6, -4, 1), D(8, -3, 0)$. Alors la distance entre le point A et le plan (BCD) est :

a	**b**	**c**	**d**
$2\sqrt{5}$	$\sqrt{21}$	$\sqrt{22}$	$\sqrt{23}$

10 Rédactions d'élèves imaginaires...

A) Otello écrit : « *Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $x + y + x = 1$.*
Je veux écrire l'équation de deux droites sécantes avec $\mathcal{P}$.
α) *Le vecteur normal à $\mathcal{P}$ est $\vec{u}(1, 1, 1)$.* **V** ☐ **F** ☐
β) *Toute droite de vecteur directeur $\vec{u}$ sera sécante avec $\mathcal{P}$.* **V** ☐ **F** ☐
γ) *La droite $\mathcal{D}$:* $\begin{cases} x = t \\ y = t \ (t \in \mathbb{R}) \\ z = t \end{cases}$ *et la droite $\mathcal{D}'$:* $\begin{cases} x = -t \\ y = -t \ (t \in \mathbb{R}) \\ z = -t \end{cases}$ *sont deux droites distinctes.* **V** ☐ **F** ☐
δ) *L'intersection de $\mathcal{D}$ avec $\mathcal{P}$ est $t = \frac{1}{3}$.* » **V** ☐ **F** ☐

B) Pizzayola écrit : « *Soient $A(1, 3, 5)$ et $B(0, 0, 0)$.*
Je veux trouver un point C pour que ABC soit un triangle rectangle.
α) *Le produit scalaire de $\overrightarrow{AB}$ par C doit être nul.* **V** ☐ **F** ☐
β) *Soit $C(u, v, w) \neq B$.*
Si $-u - 3v - 5w = 0$, alors ABC est un triangle rectangle en B. **V** ☐ **F** ☐
γ) *C doit donc être un plan.* **V** ☐ **F** ☐
δ) *En ajustant bien les coordonnées u, v, w,*
je peux même avoir ABC rectangle et équilatéral. »

C) Qorsaire écrit :

« *Je veux trouver la distance entre le point* $A(1,2,0)$ *et le plan* $\mathcal{P}$: $x-y=3$.

α) $\vec{a}(1,-1,0)$ *est normal à* $\mathcal{P}$. **V** ☐ **F** ☐

β) *La droite passant par* A, *orthogonale à* $\mathcal{P}$ *admet pour système d'équations :*

$$\begin{cases} x=1+t \\ y=2-t\,(t\in\mathbb{R}) \\ z=0 \end{cases}.$$ **V** ☐ **F** ☐

γ) *Je résous* $(1+t)-(2-t)=3$: *je trouve* $t=2$. *Alors je peux affirmer que le point* $T(3,0,0)$ *est sur* $\mathcal{P}$ *et que* $\overrightarrow{AT}$ *est colinéaire à* $\vec{a}$. **V** ☐ **F** ☐

δ) *La distance* $d(A,\mathcal{P})$ *est donc égale à la distance entre* A *et* T, *soit* $\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$. » **V** ☐ **F** ☐

D) Rustin écrit : « *Je résume plusieurs méthodes pour montrer que quatre points A,B,C,D sont coplanaires* :

α) *Si je sais que* A,B,O *alignés d'une part et que* C,D,O *alignés aussi, alors je peux conclure que* A,B,C,D *sont coplanaires.* **V** ☐ **F** ☐

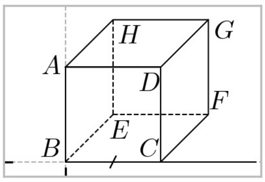
β) *Si* ABC *est rectangle en* A *et* BDC *rectangle en* D, *alors* A,B,C,D *sont cocycliques donc coplanaires.* **V** ☐ **F** ☐

γ) *Si* $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{CD}$ *sont colinéaires, alors* A,B,C,D *sont coplanaires.* **V** ☐ **F** ☐

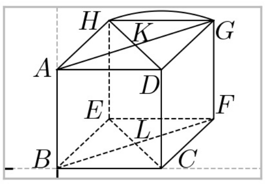
δ) *Si* (AB) *et* (CD) *sont sécantes, alors* A,B,C,D *sont coplanaires.* » **V** ☐ **F** ☐

11 Exercices avec graphiques

A) Voici un cube de côté 1. H est milieu de $[HB']$.

	**a**	K est situé sur $[GC]$, mais pas sur $[DF]$.
	b	l'aire du trapèze $KCBH$ est $\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$
	c	le cone de révolution obtenu en faisant tourner HBB' autour de (BB') a pour volume 4π
	d	le centre de gravité de HDF n'est ni sur (GB) ni sur (KH)

B) Dans ce cube de côté 1, l'arc $\widehat{HG}$ a pour centre L.

	**a**	l'angle $\theta=\left(\overrightarrow{LH},\overrightarrow{LG}\right)$ vérifie $\cos\theta=\dfrac{4}{7}$
	b	la longueur LH mesure $LH=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$
	c	la longueur ℓ de l'arc $\widehat{HG}$ vérifie $\ell<\dfrac{\pi\sqrt{6}}{6}$
	d	le prisme formé des six points F,L,E,G,K,H a pour volume $\dfrac{1}{2}$

Chapitre 16

Corrigés - Espace

1 Révisions immédiates du cours

A) **Réponse b** : $\boxed{\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = -2t - 1 \\ z = -4, t \in \mathbb{R} \end{cases}}$

a est fausse, à cause de la condition $z = 0$.
b est juste, car elle donne le point A pour $t = -\frac{1}{2}$ et le point B pour $t = \frac{1}{2}$.
c donne certes le point A pour $t = -4$, mais le point B nécessiterait $t = -2$ pour x et $t = -6$ pour y.

B) **Réponse a** : $AB = \boxed{2\sqrt{2}}$
$AB = \sqrt{(-2-0)^2 + (0-(-2))^2 + 0^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

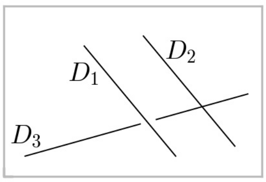
C) **Réponse c** : $\boxed{-2x - 2y - 4 = 0}$
a est fausse, car donne un plan qui contient A, B mais pas C.
b est fausse, car donne un plan qui ne contient pas A.
d est fausse, car donne un plan qui ne contient ni A, ni B, ni C.

D) **Réponse b** : $\boxed{-2x - 3y - z = -2 \times (-2) - 3 \times 0 - 1 \times (-4)}$
$-2x - 3y - z = -2 \times (-2) - 3 \times 0 - 1 \times (-4) \Leftrightarrow -2x - 3y - z = 8$.
d est fausse, car la donnée d'un point et d'un vecteur normal définit bien un plan.

E) **Réponse d** : $\boxed{\text{aucune des trois}}$
$x^2 + y^2 + z^2 + 4y + 8z = -16 \Leftrightarrow x^2 + (y+2)^2 - 4 + (z+4)^2 - 16 = -16 \Leftrightarrow x^2 + (y+2)^2 + (z+4)^2 = 4$.
Sphère de rayon $\sqrt{4} = 2$ et de centre $\Omega(0, -2, -4)$.

F) **Réponse d** : $\boxed{m = -6 \text{ et } k \text{ indifférent}}$
$\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{v}\begin{pmatrix} 3 \\ m \\ k \end{pmatrix} = 6 + m$ nul pour $m = 6$.

G) **Réponse d** : $\boxed{\text{aucune des trois}}$
Prenons les schémas suivants :



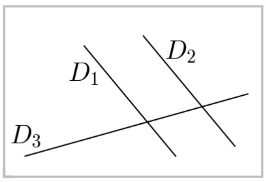


Figure 16.1.

Dans l'image de gauche, D_1 n'est pas sécante avec D_3 (en fait D_1 et D_3 sont non-coplanaires), cela illustre le fait que a est fausse.
Dans l'image de droite, D_1, D_2, D_3 sont coplanaires, cela illustre le fait que c est fausse.
c est absurde, car si $D_1 \parallel D_3$, vu que $D_1 \parallel D_2$ on aurait, par transitivité du parallélisme, $D_2 \parallel D_3$ or D_2 et D_3 sont sécantes.

H) **Réponse c** : $\boxed{D \parallel F}$
Les vecteurs directeurs de ces droites sont : $\overrightarrow{u_D}(-1;2;-1), \overrightarrow{u_G}(1;2;0), \overrightarrow{u_F}(4;-8;4)$, G ne peut donc être parallèle à aucune des deux autres, déjà, à cause du 0 et $\overrightarrow{u_F} = -4\overrightarrow{u_D}$ d'où $D \parallel F$.

I) **Réponse c** : $\boxed{D \text{ et } E \text{ sécantes}}$
On a $\overrightarrow{u_D}(-1;2;-1)$ et $\overrightarrow{u_E}(6;2;0)$ donc la réponse a) est fausse.
Pour l'intersection, réecrivons E avec un autre paramètre, soit :

$$D\colon \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 + 2t \\ z = -t \end{cases} \text{ et } E\colon \begin{cases} x = 6u - 2 \\ y = 4 + 2u \\ z = -1 \end{cases} \text{avec } u, t \in \mathbb{R}.$$

On résout alors : $\begin{cases} 2 - t = 6u - 2 \\ 3 + 2t = 4 + 2u \\ -t = -1 \end{cases}$, ce qui équivaut à $\begin{cases} 2 - 1 = 6u - 2 \\ 3 + 2 = 4 + 2u \\ t = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{1}{2} \\ u = \frac{1}{2} \\ t = 1 \end{cases}$.

Ainsi, D et E sont sécantes au point M correspondant à $t = 1$ pour D et $u = \frac{1}{2}$ pour E, c'est-à-dire au point $M(1;5;-1)$.

J) **Réponse a** : $\boxed{x + y - 2z = 0}$
Déjà, il faut s'assurer, pour que l'énoncé soit non ambigü, que O n'est pas sur Δ, c'est-à-dire que O n'est pas à la fois sur P_1 et sur P_2. Cela saute bien sûr aux yeux, puisque $2 \times 0 + 0 - 3 \times 0 + 1 \neq 0$ et $0 - 0 + 2 \neq 0$.
Ensuite, parmi les plans proposés, il faut éliminer ceux qui ne contiennent pas O, à savoir le d.
Pour choisir entre les trois restants, il faut travailler un peu.
On applique la méthode pour trouver l'intersection de deux plans :

- on choisit $x = 0$, on obtient : $\begin{cases} y - 3z + 1 = 0 \\ -y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = 3z \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 \\ y = 2 \end{cases}$ d'où le point $A(0,2,1) \in \Delta$;
- on choisit $y = 0$, on obtient : $\begin{cases} 2x - 3z + 1 = 0 \\ x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -1 \\ x = -2 \end{cases}$ d'où le point $B(-2,0,-1) \in \Delta$.

On pourrait en déduire l'équation paramétrique, mais ici dans ce QCM, on peut se simplifier la tâche : il suffit de voir quelle équation parmi a, b, c est vérifiée pour A et pour B.
a est vérifiée pour A et pour B.
b n'est vérifiée ni par A ni par B.
c n'est vérifiée ni par A ni par B non plus.

K) **Réponse c** : $\boxed{\text{un point}}$
Déjà, il est clair que $O(0,0,0)$ est sur ces trois plans, ce qui élimine la réponse b.

Résolvons le système $\begin{cases} x + y = 0 \\ x + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ z = -x \\ y + z = 0 \end{cases}$.

La troisième ligne entraîne $-x - x = 0$ soit $x = 0$ d'où $y = z = 0$: l'intersection est réduite au point O.

L) **Réponse c** : $\boxed{\text{soit un carré, soit un rectangle de rapport } \frac{L}{\ell} = \sqrt{2}, \text{ soit un triangle équilatéral}}$

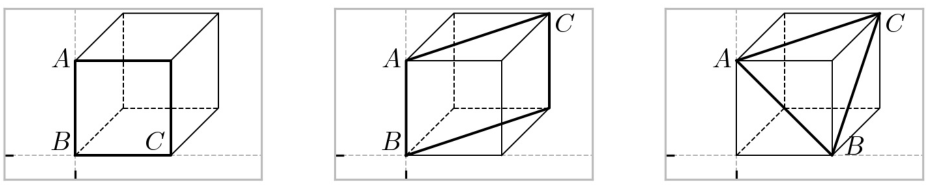


Figure 16.2. Images 1,2,3 montrant les trois cas possibles

Il ne peut pas y avoir d'autres cas. En effet, si on appelle a le côté du cube, alors : si AB est le plus petit côté du triangle ABC, alors AB peut être égal à a (A et B séparés par une arête, images 1 et 2) ou à $a\sqrt{2}$ (A et B séparés par une diagonale, image 3) mais pas à $a\sqrt{3}$ (A et B opposés par rapport au centre du cube) car dans ce cas AB ne serait pas le plus petit côté du triangle ABC.

M) **Réponse a** : $\boxed{S \text{ peut être vide}}$
Les intersections possibles entre trois plans sont : une droite (les pages d'un livre); l'ensemble vide (un prisme, ou trois murs d'une maison); un point (deux murs consécutifs et le plancher).
a est juste (penser au prisme).
b et c sont possibles mais pas nécessairement justes.
d est fausse, car dans ce cas S est vide puisque $P \cap Q$ est déjà vide.

2 Premières applications

A) **Réponse c** : $\boxed{x = y}$
Deux méthodes :

- soit $M(x, y, z)$ j'écris $MA = MB$
$\Leftrightarrow (x+2)^2 + y^2 + (z+4)^2 = x^2 + (y+2)^2 + (z+4)^2 \Leftrightarrow 4x + 4 = 4y + 4 \Leftrightarrow x = y$;
- le plan médiateur a pour vecteur normal $\overrightarrow{AB}(2, -2, 0)$ et passe par le mileu de $[AB]$ soit $I(-1, -1, -4)$ d'où : $2x - 2y = 2 \times (-1) - 2 \times (-1) \Leftrightarrow x - y = 0$.

B) **Réponse a** : $\boxed{-2 \text{ et } 2}$
$\overrightarrow{AB}(2, -2, 0) \cdot \overrightarrow{AC}(2, a, 4) = 4 - 2a$ nul pour $a = 2$.
$\overrightarrow{BA}(-2, 2, 0) \cdot \overrightarrow{BC}(0, a+2, 4) = 4 + 2a$ nul pour $a = -2$.
$\overrightarrow{CA}(-2, -a, -4) \cdot \overrightarrow{CB}(0, -a-2, -4) = a^2 + 2a + 16$ jamais nul car $\Delta < 0$.

C) **Réponse b** : $\boxed{\text{un point}}$
$AB = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$ donc $AI = \sqrt{2}$ avec $I = \text{mil}[AB]$ donc le plan est tangent à la sphère.
L'intersection entre P et S est réduite au point $\{I\}$.

D) **Réponse c** : $\boxed{\vec{u} \text{ normal à } P}$
$\vec{u} \cdot \vec{v} = -2 \neq 0$ donc a est fausse.
$\overrightarrow{u_P}(2, 3, 0)$ et $\overrightarrow{u_Q}(4, 1, 1)$ donc b est fausse.

E) **Réponse c** : $\boxed{D\colon \begin{cases} x = t \\ y = 3t - 1 \text{ avec } t \in \mathbb{R} \\ z = -t \end{cases}}$

$\overrightarrow{u_P}(2, -1, -1)$ et $\overrightarrow{u_Q}(1, 0, 1)$ ne sont pas colinéaires donc déjà d est faux : ces deux plans ont bien une droite comme intersection.
a est fausse, car $2(1+t) - (1+t) - (1+t) = 0$ d'où $D \not\subset P$.
b est fausse, car certes $2(-2t) - (-3t) - (-t-1) = 1$ pour tout t, d'où $D \subset P$. Mais par contre, $(-2t) + (-t-1) = -3t - 1$ varie avec t et donc $D \not\subset Q$.
c est juste, car d'une part $2t - (3t-1) - (-t) = 1$ pour tout t donc $D \subset P$, et d'autre part $t - t = 0$ donc $D \subset Q$.

F) **Réponse c** : $\boxed{\text{un seul}}$
Une droite et un point extérieur à cette droite définissent un plan.

G) **Réponse b** : $\boxed{\text{il y a une infinité de valeurs de } c \text{ pour lesquelles } D_1 \perp D_2}$
Examinons chaque proposition :
a est fausse, car $P_1 \parallel P_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1}(2, -2, 0) \text{col} \overrightarrow{n_2}(a, 4, b) \Leftrightarrow \overrightarrow{n_2} = -2\overrightarrow{n_1} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = -4 \end{cases}$: il y a donc une seule valeur de (a, b) pour laquelle $P_1 \parallel P_2$.
b est juste, car $D_1 \perp D_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{u_1}(3, -3, 0) \cdot \overrightarrow{u_2}(2, 2, c) = 0 \Leftrightarrow 6 - 6 = 0$, ce qui est vrai pour toute valeur de c.
c est fausse, car il est impossible d'avoir $D_1 \parallel D_2$. En effet, cela équivaudrait à $\overrightarrow{u_1}(3, -3, 0)$ et $\overrightarrow{u_2}(2, 2, 0)$ colinéaires, ce qui n'est jamais vrai.
d est fausse, car $P_1 \perp P_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1}(2, -2, 0) \perp \overrightarrow{n_2}(a, 4, b) \Leftrightarrow \overrightarrow{n_2} \cdot \overrightarrow{n_1} = 0 \Leftrightarrow 2a - 8 = 0 \Leftrightarrow a = 4$. Il y a donc une infinité de valeurs du couple (a, b) pour lesquelles $P_1 \perp P_2$: il suffit de prendre $a = 4$ et b un réel quelconque.

H) **Réponse c** : $\boxed{\begin{array}{c}\text{l'intersection de } S \text{ avec les faces de } [C] \\ \text{est constituée de 8 points}\end{array}}$

a est fausse, car le volume de $[C]$ est un huitième du volume du cube $[C']$ formé des points $(\pm1, \pm1, \pm1)$.
b est fausse, car le volume de $[C]$ est égal à $1^3 = 1$.
c est juste, car l'intersection de S avec les faces $[C]$ est constituée des 8 points suivants :

$$\left(\pm\frac{1}{2}, 0, 0\right), \left(0, \pm\frac{1}{2}, 0\right), \left(0, 0, \pm\frac{1}{2}\right).$$

d est fausse, car le volume de S est $V_S = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \times \frac{1}{8} = \frac{\pi}{6} \approx \frac{1}{2}$ donc une sphère inscrite dans un cube a un volume environ deux fois plus petit que ce dernier.

I) **Réponse c** : $\boxed{D\colon \begin{cases} x = a - t \\ y = 1 \\ z = -a + 2 + t \\ t \in \mathbb{R} \end{cases} \text{ avec } a \in \mathbb{R} \text{ quelconque}}$

On regarde si chaque système d'équations vérifie $x + y + z = 3$: c'est le cas pour a, c, d (on élimine b).
Ensuite, on regarde pour $x - 2y + z = 0$: c'est le **c** qui est le bon.
Pour comprendre pourquoi a peut être quelconque, il faut se souvenir qu'un système d'équations paramétriques d'une droite correspond à la donnée d'un point et d'un vecteur directeur : or il peut y avoir une infinité de points de départ du paramétrage, et une infinité aussi de choix pour le vecteur directeur c'est-à-dire pour les graduations qu'on pose sur la droite.

J) **Réponse d** : $\boxed{D\colon \begin{cases} -5x + y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}}$

On intègre les x, y, z donnés par le système dans chacune des deux équations de chaque proposition, sauf la b bien sûr qui de toutes façons ne représente rien sinon l'équation du seul plan $x + y - z = 0$.

K) **Réponse b** : $\boxed{y + 3z = 8}$

On vérifie si L est sur les plans indiqués : cela élimine c.
On regarde les vecteurs normaux : $\vec{n_a}\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}; 1\right)$, $\vec{n_b}(0; 1; 3)$ et $\vec{n_P}(2; -1; 1)$, seul le produit scalaire $\vec{n_b} \cdot \vec{n_P}$ est nul.

L) **Réponse c** : $\boxed{\text{on peut choisir, } M, M', Q, Q' \text{ de manière à ce que } Q \cap Q' \text{ soit non vide}}$

a est fausse, car alors D et D', en tant que perpendiculaires à un même plan, seraient parallèles, or elles sont non coplanaires.
b est fausse, car D et D' sont non coplanaires.
c est juste, en effet il suffit de prendre pour Q un plan non parallèle à D'.
d est fausse, il suffit de prendre $D = (Ox)$, $D' = (Oy)$, $P = (xOz)$, $Q = (xOy)$.

3 Questions de logique

A) **Réponse c** : $\boxed{M \in P \cap S \Rightarrow x^2 + y^2 = 1}$

a est fausse, car $MO \geqslant 1$ signifie simplement que M est en dehors de la sphère.
b est fausse, car le point $(1, 0, 99)$ vérifie cela ($x^2 + y^2 = 1$ est l'équation d'un cylindre).
c est vraie, car $M \in P \cap S$ équivaut à : « $z = 0$ et $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ » ce qui implique $x^2 + y^2 = 1$.
d est fausse, car par exemple l'origine O vérifie $x = y = 0$ mais pas $[M \in S$ et $d(M, P) = 1]$.
En fait, seuls deux points vérifient $[M \in S$ et $d(M, P) = 1]$ ce sont $(0, 0, 1)$ et $(0, 0, -1)$.

B) **Réponse b** : $\boxed{M \in P \Leftrightarrow \left[\overrightarrow{AM} \perp \vec{u} \text{ et } A \in P\right]}$

a est fausse, car seul le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur de l'espace.
b est juste, c'est la caractérisation d'un plan par un point et un vecteur normal.
c est fausse, car on n'a pas précisé si $A \in P$.
d n'est vraie que dans le sens $\Rightarrow$.

C) **Réponse a** : $\boxed{\text{si } A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 \text{ forment un pentagone régulier de centre } O\text{, alors } k \in \{0, 1, 5\}}$
a est juste, car dans ce cas soit P le plan contenant les six points :
Si $k \geqslant 2$ alors $D \perp P$ et donc $k = 5$ (D serait orthogonale à deux droites de P donc à P)
donc k est égal à 0,1, ou 5.
b est fausse : il suffit de prendre $\Omega, A_1, A_2, A_3, A_4$ incluses dans un plan P et $D \perp P$.
c est fausse : si ces cinq points sont alignés, alors k est égal justement soit à 0 soit à 5.
d est fausse : il suffit de penser à la situation Ω, A_1, A_2, A_3 et D coplanaires qui donne $k \leqslant 2$.

4 Questions en tableau

A) **Réponse d** : $\boxed{\overrightarrow{DG} \cdot \overrightarrow{EG} = 0}$

a est fausse, car $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} = AD^2$ par projection.
b est fausse, car $\overrightarrow{HD} \cdot \overrightarrow{DE} = -HD^2$.
c est fausse, car $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{BE} = 0$.
d est juste, car (DG) est orthogonale au plan $(HGFE)$.

B) **Réponse a** : $\boxed{\sqrt{3}/2}$
Ce triangle équilatéral a pour côté $a = \sqrt{2}$ (diagonale du carré de côté 1) et donc son aire est $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

C) **Réponse b** : $\boxed{\overrightarrow{FD}(1, 0, 1)}$
a est fausse, car $C(1, 1, 0)$.
c est fausse, car $AF = \sqrt{\left(\sqrt{2}^2 + 1\right)} = \sqrt{3}$.
d est fausse, car $AHEB$ a pour aire 1.

D) **Réponse d** : $\boxed{\text{aucune des trois}}$
En effet, ce point dépend de D : il s'agit du projeté orthogonal de D sur le plan (ABC).

E) **Réponse b** : $\boxed{\text{l'intersection des médianes de } ABC}$
En effet, il existe toujours un unique point M tel que $\overrightarrow{DM}$ soit égal à un vecteur donné.
Ici, R est appelé *barycentre* de ABC et vérifie, en décomposant les vecteurs par R avec Chasles :

$$\overrightarrow{RA} + \overrightarrow{RB} + \overrightarrow{RC} = \vec{0}.$$

F) **Réponse b** : $\boxed{\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AB}}$

a est fausse, car $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DA} = -DC \times DA \times \cos(\pi/3) < 0$.
b est juste, car $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = BC \times BA \times \cos(\pi/3) > 0$.
c est fausse, car $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DB} = -\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB} = -DA \times DB \times \cos(\pi/3) < 0$.
d est fausse, car $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AD} = -AD^2 < 0$.

5 Questions Vrai/Faux

A)

V	

B)

V	

Vrai car son équation est de la forme $(x - x_a)(x - x_b) + (y - y_a)(y - y_b) + (z - z_a)(z - z_b) = 0$.
On remplace pour Σ :

$$\begin{aligned} & \cancel{(1-1)(1-3)} + \left(0 + 1 - \sqrt{2}\right)\left(0 + 1 + \sqrt{2}\right) + \left(3 - \sqrt{2} - 2\right)\left(3 - \sqrt{2} - 4\right) \\ = \; & \left(1 - \sqrt{2}\right)\left(1 + \sqrt{2}\right) + \left(1 - \sqrt{2}\right)\underbrace{\left(-1 - \sqrt{2}\right)}_{\text{on sort le} -} \\ = \; & 0, \text{ donc oui, } H \in \Sigma. \end{aligned}$$

On remplace pour Π :
$1 - 0 + \left(3 - \sqrt{2}\right)\sqrt{2} = 1 + 3\sqrt{2} - 2 = 3\sqrt{2} - 1$ donc oui, $H \in \Pi$.

C) | **V** | |

- Π est un plan car son équation est de la forme $ax+by+cy=d$ avec a,b,c non tous trois nuls ;
- un vecteur normal à Π est $\vec{n}(a,b,c)=\vec{n}(1,-1,\sqrt{2})$; d'un autre coté, $\overrightarrow{CH}(-1,1,-\sqrt{2})$: ces deux vecteurs sont opposés donc colinéaires.

D) | **V** | |

Trouvons les coordonnées du centre de la sphère : $\Omega\left(\frac{1+3}{2},\frac{-1+\sqrt{2}-1-\sqrt{2}}{3},\frac{2+4}{2}\right)$ soit $\Omega(2,-1,3)$ en fait $\Omega=C$!
La droite $(H\Omega)=(HC)$ est dont orthogonale au plan, donc la shpère est tangente au plan en H.

E) | | **F** |

Le point $(0,0,11)$ est à l'extérieur du cube mais ne satisfait pas cette relation.

F) | **V** | |

Car cette relation est le contraire exact de la relation $\begin{cases} x^2<1 \\ \text{et} \\ y^2<1 \\ \text{et} \\ z^2<1 \end{cases}$ qui désigne l'intérieur du cube.

G) | **V** | |

Le 2 est la longueur des arêtes. Le $2\sqrt{2}$ est (Pythagore) la diagonale de chaque face. Le $2\sqrt{3}$ est la longueur des diagonales traversant le cube et passant par son centre.

H) | | **F** |

Si je choisis $(1,-1,-1)$, $(-1,1,-1)$, $(-1,-1,1)$, aucun des deux n'a deux coordonnées identiques avec l'un des deux autres.

I) | **V** | |

Si l'on pose $k\in\mathbb{R}$ (ce qui signifie « k définit l'ensemble des nombres réels »), alors le système définit une droite. Si l'on restreint k à un segment, le système définit alors un segment. Les extrémités du segment sont définies par $k=0$ et $k=2$. On trouve ici $M_{k=1}(3;1;2)$ et $M_{k=-1}(-1;3;-4)$. Or, les points A et B correspondent respectivement à $k=0$ et $k=2$.

J) | **V** | |

Un vecteur normal au plan donné est $\vec{n}(2;-1;3)$ tandis qu'un vecteur directeur de la droite est $\vec{u}(2;-1;3)$. Ces deux vecteurs sont colinéaires donc oui, la droite est perpendiculaire au plan.

K) | **V** | |

C'est un cas particulier du système $\begin{cases} x=at+u \\ y=bt+v \\ z=ct+w \end{cases}$ avec $a=b=0$ et $u=2$ et $v=3$.
Cette droite passe par le point $(2;3;0)$ et est verticale (parallèle à l'axe des z).

L) | **V** | |

Pour savoir si les trois droites D_1, D_2 et D_3 sont concourantes, il faut remarquer que, déjà, la troisième coordonnée impose $t=u=1$ et cela donne le point $(3;2;1)$ pour les trois droites. Reste à vérifier si elles sont effectivement concourantes. Comme elles passent par un même point, le seul cas qui pourrait faire qu'elles ne le soient pas serait que deux d'entre elles soient confondues. Ce n'est pas le cas, car les vecteurs directeurs : $\vec{u_1}(1;1;1)$, $\vec{u_2}(1;0;-1)$ et $\vec{u_3}(2;1;0)$ sont deux à deux non coplanaires.

M) | **V** | |

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AB}\cdot(-\overrightarrow{AC})=-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-a.$

N) | | **F** |

Le produit scalaire est symétrique : $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$.

O) | | **F** |

$a^2=(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2=AB^2AC^2\cos^2(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$,
donc $a^2-AB^2\times AC^2=AB^2\times AC^2(\cos^2(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})-1)=-AB^2\times AC^2\sin^2(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$.

P) | V | |

$|a| = AB \times AC \times \left|\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)\right|$ donc $AB \times AC = |a| \Leftrightarrow \cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = 1$ ou $-1 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = 0$ ou $\pi \Leftrightarrow A, B, C$ alignés.

Q) | | F |

Contre exemple : $A(0,0,0)$, $B(0,0,1)$, $\vec{u}(1,0,0)$, $\vec{v}(0,1,0)$.

R) | V | |

Non colinéaires deux à deux ne suffit pas.
Contre exemples : prenons $A(0,0,0)$, $\vec{u}(1,0,0)$, $\vec{v}(0,1,0)$ et $\vec{w}(1,1,0)$.
Alors, si $B(1,1,0)$, on peut alors avoir $(\alpha,\beta,\gamma) = (1,1,0)$ ou $(\alpha,\beta,\gamma) = (0,0,1)$.
Et si $B(0,0,1)$, aucun triplet (α,β,γ) ne peut convenir.
Il faudrait que la famille $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ soit *libre* mais cette notion est hors-programme en lycée.

S) | V | |

Voici trois exemples :

- $A(0,0,0)$, $B(0,0,1)$, $\vec{u}(1,0,0)$, $\vec{v}(0,1,0)$ et $\vec{w}(1,1,0)$: aucun triplet (α,β,γ) ne peut convenir ;
- $A(0,\ 0,\ 0)$, $B(1,\ 1,\ 0)$, $\vec{u}(1,\ 0,\ 0)$, $\vec{v}(0,\ 1,\ 0)$ et $\vec{w}(1,\ 1,\ 0)$: pour toute valeur de $t \in \mathbb{R}$, le triplet $(\alpha,\beta,\gamma) = (t,t,1-t)$ convient ;
- $A(0,0,0)$, $B(a,b,c)$, $\vec{u}(1,0,0)$, $\vec{v}(0,1,0)$ et $\vec{w}(0,0,1)$: on voit bien que seul le triplet $(\alpha,\beta,\gamma) = (a,b,c)$ convient.

T) | V | |

Si l'on a $K(a,b,c)$ dans $(0,\vec{u},\vec{v},\vec{w})$, alors $K(c,b,a)$ dans $(0,\vec{w},\vec{v},\vec{u})$. Ces écritures signifient toutes deux que $\overrightarrow{OK} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$.

U) | V | |

On s'assure que R vérifie le système. La phrase, dans la façon dont elle est tournée, n'impose pas que R soit l'unique solution du système, il n'y aura donc rien d'autre à vérifier.

$$(S)\colon \begin{cases} 2+2-3=1 \quad \text{ok} \\ -3\times 2+1+2=-3 \quad \text{ok} \\ 2\times 2-3+1=2 \quad \text{ok} \end{cases}$$

V) | V | |

On doit trouver une équation paramétrique de D. Très simple : on cherche deux points.

- si on prend $x=0$, on obtient alors :
$$\begin{cases} y+2z=-3 \\ -3y+z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+2z=-3 \\ -6y+2z=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+2z=-3 \\ 7y=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=-1 \\ y=-1 \end{cases};$$
- ensuite, on prend $y=0$, on obtient alors :
$$D\colon \begin{cases} -3x+2z=-3 \\ 2x+z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x+2z=-3 \\ 4x+2z=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=0 \\ x=1 \end{cases};$$
- on a donc deux points de D, à savoir $A(0;-1;-1)$ et $B(1;0;0)$. (On vérifie). Du coup, on a un vecteur directeur de D : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}(1;1;1)$ d'où $D\colon \begin{cases} x=1+k \\ y=k \\ z=k \end{cases}$, $k \in \mathbb{R}$. On injecte cela dans l'équation de P et on obtient $(1+k)+2k-3k=1 \Leftrightarrow 1=1$ toujours vrai (les k se sont éliminés). Donc oui, $D \subset P$.

W) | V | |

On peut, par exemple, vérifier que nos deux points A et B sont dessus.

X) | | F |

On a vu que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}(1;1;1)$ est un vecteur directeur de D, or clairement $\vec{k}$ n'est pas colinéaire à $\vec{u}$.

6 Questions ++

A) **Réponse d** : $\boxed{\text{pour tout } M \in X, \overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{AB}}$
b est fausse, car X est un ensemble de points, pas un ensemble de vecteurs.
c est fausse, car X est un plan, aucun autre plan ne peut donc être strictement contenu dans X.
d est juste, car $\overrightarrow{AB}(-1;0;1)$ et donc $\vec{f} \cdot \overrightarrow{AB} = -1+1=0$ et $\vec{g} \cdot \overrightarrow{AB} = -2+2=0$.
Ainsi, pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ on a : $(\alpha\vec{f} + \beta\vec{g}) \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

B) **Réponse d** : $\boxed{\text{supposons } m \neq 2, \text{ soient } \vec{u} \in Y_2 \text{ et } \vec{v} \in Y_m; \text{ alors } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ ne sont pas orthogonaux}}$
a est fausse, car si un vecteur $\vec{n}$ est dans Y_m alors tous les $\lambda\vec{n}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ sont dans Y_m aussi. Y_m ne peut donc être constitué d'un seul vecteur. On peut noter toutefois que $\overrightarrow{u_m}(1;m-2;1)$ est bien dans Y_m. En effet, il est orthogonal à deux droites de P_m :

$$\begin{cases} \overrightarrow{u_m}(1;m-2;1) \cdot \overrightarrow{AB}(-1;0;1) = -1+1=0 \\ \overrightarrow{u_m}(1;m-2;1) \cdot \overrightarrow{BZ}(0;-1;m-2)=0 \end{cases}.$$

b est fausse. Il suffit pour le montrer, d'après le calcul précédent, de montrer que $\vec{u_4} \perp \overrightarrow{u_{-1}}$. Les réponses intermédiaires de tous ces QCM, mêmes fausses, sont souvent là pour donner des indications de calcul.
Allons-y :
$\vec{u_4}(1;2;1) \perp \overrightarrow{u_{-1}}(1;-3;1) = 1-6+1 \neq 0$.
On peut faire un petit calcul :
$\overrightarrow{u_m}(1;m-2;1) \perp \vec{u_4}(1;2;1) \Leftrightarrow 1+(m-2)2+1=0 \Leftrightarrow 2m=-2+4 \Leftrightarrow m=1$. Ainsi, l'énoncé correct aurait été : « Tout vecteur de Y_1 est orthogonal à tout vecteur de Y_{-1} ».
c est fausse, car A, B et Z_m alignés $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}(-1;0;1)$ col $\overrightarrow{AZ_m}(-1;-1;m-1)$ or cela est impossible vu la seconde coordonnée.
d est juste, car $\vec{u_2}(1;0;1)$ et $\overrightarrow{u_m}(1;m-2;1)$; il en découle que $\vec{u_2} \cdot \overrightarrow{u_m} = 1+1=2 \neq 0$.

Remarque : si $m \neq 2$ est donné, alors :
$\overrightarrow{u_{m'}}(1;m'-2;1)$ orthogonal à $\overrightarrow{u_m}(1;m-2;1) \Leftrightarrow m' = 2 + \dfrac{-2}{m-2}$.
Pour tout $m \neq 2$ il y a donc un $\overrightarrow{u_{m'}}(1;m'-2;1)$ orthogonal à $\overrightarrow{u_m}(1;m-2;1)$.

C) **Réponse c** : $\boxed{\left|\vec{u} \cdot \overrightarrow{AM}\right| = kAH}$

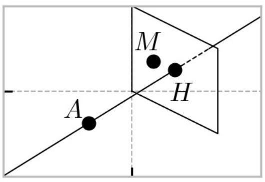


Figure 16.3.

a est fausse, car si $M=H$ et $A \neq H$, alors $AM \times MH = 0$ mais $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AM} = \|\vec{u}\| \times AH \neq 0$ puisque $A \notin P$. Or, si les deux quantités étaient proportionnelles, elles seraient nulles ensemble.
b est fausse : $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AM} = kAH$ est impossible car suivant la position de A d'un côté ou de l'autre du plan P, on peut avoir $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AM} < 0$ ou $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AM} > 0$.
c est juste, car $\left|\vec{u} \cdot \overrightarrow{AM}\right| = \|\vec{u}\| \times AH$ par projection.
d est c, car $MH = k\|\vec{u}\|$ serait absurde : MH peut varier comme on veut, et même être nul si $M=H$.

D) **Réponse c** : $\boxed{\text{tous les points de la sphère sont à une distance inférieure ou égale à } 2r \text{ du plan } Q}$
a est fausse, car cette distance peut prendre n'importe quelle valeur entre 0 et $2r$.
b est fausse : cela veut juste dire que M est extérieur à la sphère.
c est juste : soit T l'unique point commun entre S et Q (point de « tangence »), soit Q' le symétrique de Q par rapport à S, alors Q' est le point de S le plus éloigné du plan Q, et sa distance au plan est la distance $QQ' = 2r$.
d est totalement fausse, car l'ensemble de ces points forme en quelque sorte un sandwich entourant Q, sandwich dont les points peuvent être dans la sphère ou hors de celle-ci.
Par contre, la réciproque serait vraie : tout point de la sphère est dans le sandwich (à cause de **c**).

E) **Réponse** b : $\boxed{\text{il est possible de choisir } A, B, C, D \text{ tels que } \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = -a^2}$

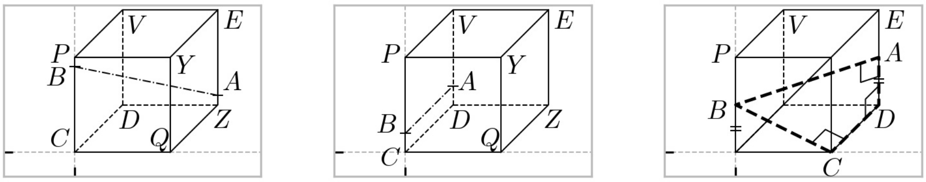


Figure 16.4. figures du a, du **b** et du d

a est fausse (figure de gauche), car si A est proche du point Z de la figure, et B proche de P, alors AB se rapproche de $a\sqrt{3}$ (grande diagonale d'un cube, théorème de Pythagore).
b est juste (figure du milieu), il suffit d'avoir $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$.
c est fausse, il faudrait pour cela $\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{BD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB} \Leftrightarrow ACBD$ parallélogramme donc $[AB]$ et $[CD]$ se croiseraient en leur milieu, or $[CD]$ étant une arête du cube, cela impliquerait que le segment $[AB]$ coupe une arête de cube en son mileu, donc l'un des deux points A ou B serait extérieur au cube.
d est fausse. En effet, ceci n'est vrai que si les quatre points A, B, C, D sont coplanaires ! Dans ce cas, ils forment effectivement un rectangle. Mais on peut leur trouver des positions où ils ne le sont pas. Exemple (figure de droite) : seul $\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right)$ n'est pas droit.

F) **Réponse** **d** : $\boxed{\begin{array}{c}\text{l'ensemble de toutes les droites passant par} \\ C \text{ et sécantes avec } V \text{ est un plan contenant } V\end{array}}$

a est fausse, car U et V sont deux droites parallèles.
b est fausse, car U est l'intersection de deux plans, les plans $x = 0$ et $y = 0$.
c est fausse ; cet ensemble est le plan horizontal d'équation $z = k$. Il est orthogonal à U, donc à V aussi.
d est juste, car un point et une droite ne le contenant pas définissent un plan. Or, C n'est pas sur V.

Remarque : ce plan a pour équation $x = y$.

7 QCM alternatifs (de 0 à 4 réponses justes)

A) $\boldsymbol{\alpha}$**,**$\boldsymbol{\gamma}$ **et** $\boldsymbol{\delta}$ sont justes.
$\boldsymbol{\alpha}$ est juste.
β est fausse : $AB = 3$.
$\boldsymbol{\gamma}$ est juste car, par Pythagore : $AB^2 = AC^2 + BC^2 = 2 + 1 = 3$.
$\boldsymbol{\delta}$ est juste puisque cette sphère est de rayon $\sqrt{3}$.

B) $\boldsymbol{\delta}$ est juste.
En effet, un produit de facteurs est nul ssi l'un des facteurs est nul donc $(x^2-1)(y^2-1)(z^2-1) = 0$ équivaut à : $\begin{cases} x = \pm 1 \text{ ou :} \\ y = \pm 1 \text{ ou :} \\ z = \pm 1, \end{cases}$ c'est-à-dire que $\mathcal{K}$ est formé des points $(\pm 1, x, y)$,$(x, \pm 1, z)$,$(x, y, \pm 1)$ pour toutes les valeurs de $x, y, z \in \mathbb{R}$.
α est fausse car si c'était un cube, les coordonnées seraient limitées, or, ici $\mathcal{K}$ contient par exemple tout le plan $(1, x, y)$ pour $x, y \in \mathbb{R}$: les faces d'un cube ne peuvent être des plans infinis, mais seulement des carrés.
β et γ sont fausses pour les mêmes raisons que α.
$\boldsymbol{\delta}$ est juste car $\mathcal{K}$ contient toute la droite $(-1, 1, z)$ pour $z \in \mathbb{R}$.

C) **β et** γ sont justes.
En effet, $|x^2-1|+|y^2-1|+|z^2-1|=0$ est équivalent à $|x^2-1|=|y^2-1|=|z^2-1|=0$, donc à :

$$\begin{cases} x=\pm 1 \\ y=\pm 1 \\ z=\pm 1 \end{cases}.$$

Ainsi :
α est fausse : S n'est pas un cube, mais S est constitué des huit sommets d'un certain cube.
$\boldsymbol{\beta}$ est juste : une sphère de centre O et de rayon $\sqrt{3}$.
γ est juste : elle contient huit points.
δ est fausse puisque S ne contient qu'un nombre fini de points, or, un segment est constitué d'une infinité de points.

D) γ et $\boldsymbol{\delta}$ sont justes.
En effet, l'énoncé stipule que B, C, D sont sur une sphère de centre A et de rayon a.
L'hypothèse $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{BC}$ peut être illustrée par l'image suivante :
A est le centre de la Terre, D est le pôle nord, et B, C sont à la même latitude.
α est fausse : on peut avoir B, D diamétralement opposés sur la sphère et donc $BD=2a$.
β est fausse : c'est une sphère.
γ est juste : si $\overrightarrow{AD}$ est orthogonal au plan (ABC), cela veut dire, en filant notre métaphore, que B, C sont sur l'équateur. Dans ces conditions, ADB et ADC sont isorectangles en A et donc on peut appliquer Pythagore : $DB=DC=a\sqrt{2}$ (diagonale d'un carré de côté a).
$\boldsymbol{\delta}$ est juste : si A, B, C, D sont coplanaires, cela veut dire, toujours par notre métaphore, que B et C ont des longitudes opposées, comme le sont approximativement la Norvège et le détroit de Béring. Ainsi, A, B, C, D sont dans un même plan vertical. Si, de plus, $BC=a$, alors ABC est équilatéral :

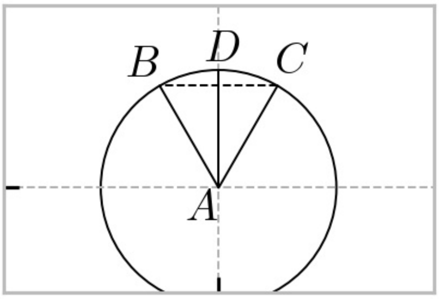


Figure 16.5.

Soit H l'intersection de (AD) et (BC). On a alors $AH=a\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (hauteur d'un triangle équilatéral).
Appliquons Pythagore dans DHB :

- $DH=a-AH=a\left(1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$;
- $HB=\dfrac{1}{2}BC=\dfrac{a}{2}$;
- donc $DB^2=\dfrac{a^2}{4}+a^2\left(1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=a^2\left(\dfrac{1}{4}+1+\dfrac{3}{4}-\sqrt{3}\right)=a^2(2-\sqrt{3})$ donc $\boldsymbol{\delta}$ est juste.

E) $\boldsymbol{\beta}$ est juste.
α est fausse : $A(0,0,0)$ donne : $x^2+y^2+(z+1)^2=0+0+1<4$ à l'intérieur de S_1 et $x^2+y^2+(z-1)^2=0+0+1<4$ à l'intérieur de S_2 aussi.
$\boldsymbol{\beta}$ est juste : $A(0,0,-2)$ donne : $x^2+y^2+(z+1)^2=0+0+1<4$ à l'intérieur de S_1 et $x^2+y^2+(z-1)^2=0+0+9>4$ à l'extérieur de S_2.
γ est fausse : $A(a,2,b)$ donne : $x^2+y^2+(z+1)^2=a^2+4+(b+1)^2 \geqslant 4$ car un carré est positif, donc A à l'extérieur de la sphère S_1 ou bien sur la sphère S_1, mais en aucun cas strictement à l'intérieur.
δ est fausse : le cylindre d'axe (Oz) et de rayon 2 a pour équation $x^2+y^2=4$ (et z est en quelques sortes « libre »). Sur ce cylindre, on a donc forcément $x^2+y^2+(z+1)^2 \geqslant 4$, donc tout point de ce

cylindre est sur la sphère S_1 ou à l'extérieur de cette sphère.
Il faut voir la configuration de cet exercice comme deux balles de tennis (S_1 et S_2) emboîtées dans un rangement cylindrique (le cylindre de la question δ).

8 Familles, algo et récurrences

A) **Réponse d** : $\boxed{\text{trois points consécutifs quelconques de la suite } (A_n) \text{ sont toujours alignés}}$
Regarder les premières valeurs de n : $A_0(0,0,1), A_1(1/2,0,1/2), A_2(3/4,0,1/4), A_3(7/8,0,1/8)$.
a est fausse : il suffit de prendre $n=0$. Il faudrait écrire $A_n\left(1-\frac{1}{2^n}, 0, \frac{1}{2^n}\right)$.
b est fausse, car $A_0A_1=\sqrt{2}/2$, puis $A_1A_2=\sqrt{2}/4$ puis $A_2A_3=\sqrt{2}/8$... et ainsi la longueur de la ligne brisée est, en mettant $\sqrt{2}$ en facteur : $\ell_n=\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)$ qui converge vers $\sqrt{2}$.
c est fausse, car les premiers exemples nous montrent que $\overrightarrow{OA_n}$ et $\overrightarrow{OA_{n+1}}$ dont de même sens.
d est juste, car pour tout n on a $A_n=(1,0,0)+\left(-\frac{1}{2^n}, 0, \frac{1}{2^n}\right)$ donc les A_n sont sur la droite :

$$D\colon \begin{cases} x=1-t \\ y=0 \\ z=t \end{cases}, \ t\in\mathbb{R}$$

B) **Réponse c** : $\boxed{\text{deux exactement sont valables}}$
Le α donne $\overrightarrow{u_n}(-1/n, n, 0)$, or $\overrightarrow{OB}(0,0,7)$ et $\overrightarrow{OK_n}\left(n, \frac{1}{n}, 0\right)$, on vérifie avec le produit scalaire, c'est bon.
Le β donne $\overrightarrow{u_n}(-1/n, 1, 0)$: pas bon.
Le γ donne $\overrightarrow{u_n}(-1, n^2, 0)$: ça marche.
Le δ donne $\overrightarrow{u_n}(n, 1, 0)$: pas bon.

B) **Réponse b** : $\boxed{\text{pour tout } n\geqslant 0, \text{ la distance } B_nB_{n+1} \text{ vaut } \sqrt{3}}$
Il est vivement conseillé de calculer les premières valeurs :
$B_0(1,0,0), B_1(0,1,1), B_2(-1,0,2), B_3(1,-1,3)$: elles permettent de répondre.
a est fausse, car un 0 a été écrit à la place de n dans la coordonnée en z.
b est juste, car (x_n, y_n) tourne entre quatre valeurs qui sont $(1,0), (0,1), (-1,0), (0,-1)$ séparés deux à deux d'une distance $\sqrt{2}$, tandis que la coordonnée en z augmente de 1 à chaque étape, et donc :

$$B_nB_{n+1}=\sqrt{\sqrt{2}^2+1^2}=\sqrt{3}.$$

c est fausse, car $\overrightarrow{B_nB_{n+1}}$ vaut toujours une valeur parmi $(-1,1,1)$, $(-1,-1,1), (1,-1,1,), (1,1,1)$ donc le produit scalaire envisagé vaut toujours 1.

9 Réflexion autour d'un thème mathématique

$\boxed{\text{Thème : } \textbf{la distance entre deux objets}.}$

A) **Réponse c** : $\boxed{\text{la sphère de diamètre } [RU] \text{ avec } R(2,2,4) \text{ et } U(-2;2;4)}$
L'ensemble des points situés à une distance 2 du point $P(0;2;4)$ est la sphère de centre P et de rayon 2, ce qui elimine les réponses a et b.
Vérifions si $\overrightarrow{RP}=\overrightarrow{PU}$: on a $\overrightarrow{RP}\begin{pmatrix} 0-2=-2 \\ 2-2=0 \\ 4-4=0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{PU}\begin{pmatrix} -2-0=-2 \\ 2-2=0 \\ 4-4=0 \end{pmatrix}$.
R et U sont donc symétriques par rapport à P.
Est-ce que R est sur la sphère ?
Vu les coordonées calculées ci-dessus, on a clairement $RP=PU=2$ donc la bonne réponse est la c.

B) **Réponse d** : $\boxed{\text{aucune des trois}}$
L'ensemble des points situés à une distance 2 du plan $Z\colon x+y+z=1$ est la réunion de deux plans parallèles dont l'écart avec Z est 2.

C) **Réponse a** : $\boxed{\sqrt{21}}$
Il faut savoir ruser lorsque plusieurs solutions sont proposées. La règle du jeu est qu'une et une seule d'entre elles est juste.
On calcule $AB=\sqrt{21}$ et $AC=\sqrt{45}$. La distance entre A et la droite (BC) est donc inférieure ou égale à $\sqrt{21}$. Vu que les autres réponses proposées sont $\sqrt{22}$, $\sqrt{23}$ et $\sqrt{24}=2\sqrt{6}$ qui sont toutes supérieures

à AB, alors la bonne réponse est la réponse **a**.
Ce type de raisonnement est typique des QCM, mais se révèle très utile aussi dans des sujets de bac classique, car il vous entraîne à tirer un maximum d'informations à partir d'un minimum de données.

Remarque : on pouvait aussi vérifier, par le produit scalaire, que $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}$, ce qui prouve que la distance entre A et (BC) est la distance AB.

D) **Réponse b** : $\boxed{\sqrt{21}}$
Même raisonnement : $AB = \sqrt{21}$, $AC = \sqrt{41}$ et $AD = \sqrt{59}$. La distance recherchée est donc soit celle du a, à savoir $d = \sqrt{20}$, soit celle du b, à savoir $d = \sqrt{21}$.
Cette fois, il faut trancher : a-t-on $\overrightarrow{AB} \perp (BCD)$? Si oui, la réponse est $\sqrt{21}$, si non, la réponse est $\sqrt{20}$.
Il suffit de calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD}$:
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 4 - 4 = 0$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{BD}\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 6 - 4 - 2 = 0$ d'où réponse **b**.

10 Rédactions d'élèves imaginaires...

A) Réponses :

α) | | **F** |

C'est vrai que $\vec{u}$ est normal mais c'est un vecteur normal et non pas le vecteur normal.

β) | **V** | |

Oui, une telle droite sera même perpendiculaire à P.

γ) | | **F** |

Non, ceux sont les mêmes, paramétrées inversement l'une de l'autre (le point paramétré t de l'une est le point paramétré $-t$ de l'autre).

δ) | | **F** |

Le calcul est juste, mais l'intersection d'une droite et d'un plan n'est pas un nombre. Il faut ensuite remplacer t par cette valeur dans le système paramétrique qui définit $\mathcal{D}$.

B) Réponses :

α) | | **F** |

Il n'y a pas de produit scalaire entre un vecteur et un point. Il aurait fallu écrire : « L'un des produits scalaires $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$, doit être nul ».

β) | **V** | |

C'est juste car l'égalité écrite équivaut à $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.

γ) | | **F** |

Un point n'est pas un plan. De plus, l'ensemble des lieux possibles pour C est une sphère de diamètre $[AB]$ et non un plan.

δ) | | **F** |

Un triangle ne peut être à la fois rectangle et équilatéral.

C) Réponses :

α) | **V** | |

Vrai car un plan d'équation $a\,x + b\,y + c\,z + d = 0$ admet $\vec{n}(a, b, c)$ comme vecteur normal.

β) | **V** | |

Vrai car ce système s'écrit $\begin{cases} x = x_A + a\,t \\ y = y_A + b\,t \\ z = z_A + c\,t \end{cases}$ avec les notations (a, b, c) du α.

γ) | **V** | |

Vrai car j'ai résolu l'équation permettant de trouver l'intersection entre la droite et le plan.

δ) | **V** | |

C'est vrai : pour trouver la distance entre un point et un plan, on trouve la distance entre ce point et l'intersection de la perpendiculaire à ce plan passant par ce point.

D) Réponses :

α) | **V** | |

Oui car il suffit de considérer le plan défini oar les deux droites sécantes (AO) et (CO).

β) | | **F** |

Non, B et D sont simplement sur la sphère de diamètre $[AB]$.

γ) | **V** | |

Oui car les deux droites (AB) et (CD) sont soit strictement parallèles donc définissent un plan, soit confondues.

δ) | **V** | |

Oui.

Résumé : deux droites parallèles définissent un plan ; deux droites sécantes définissent un plan. Par contre, deux droites non coplanaires, comme le mot l'indique, le définissent pas un plan.

11 Exercices avec graphiques

A) **Réponse b** : $\boxed{\text{l'aire du trapèze } KCBH \text{ est } \frac{3\sqrt{2}}{4}}$

a est fausse : par le théorème des milieux dans HBB', $\overrightarrow{CK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BH}$ donc K est au centre de la face $DGFC$ donc K est à la fois le mileu de $[GC]$ et celui de $[DF]$.

b est juste : cette aire vaut $\frac{BH+CK}{2}\times BC=\frac{\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2}}{2}\times 1=\frac{3}{4}\sqrt{2}$.

c est fausse : ce cône a pour base un disque de rayon $\sqrt{2}$ et donc d'aire $\pi\sqrt{2}^2=2\pi$, et sa hauteur est $BB'=2$. Cependant, le volume d'un cône n'est pas base $\times$ hauteur, mais $\frac{1}{3}$base $\times$ hauteur. La bonne r éponse ici était donc $\frac{4\pi}{3}$.

d est fausse :

- ce centre de gravité est sur (GB) par symétrie, au même titre que le serait celui de la face AEC ;
- il est sur (HK) aussi car (HK) est une médiane de HDF.

B) **Réponse c** : $\boxed{\text{la longueur } \ell \text{ de l'arc } \widehat{HG} \text{ vérifie } \ell<\frac{\pi\sqrt{6}}{6}}$

a est fausse : l'idée est d'utiliser le produit scalaire ; on peut choisir le repère que l'on veut. Si, par souci de symétrie, on prend comme repère $\left(L;\overrightarrow{BE};\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}\right)$, alors on a $\overrightarrow{LH}\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2};1\right)$ et $\overrightarrow{LG}\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};1\right)$ donc $\overrightarrow{LH}\cdot\overrightarrow{LG}=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+1=1$. D'autre part, on a $LH=LG=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+1}=\sqrt{\frac{3}{2}}$. On applique alors $\overrightarrow{LG}\cdot\overrightarrow{LH}=LG\times LH\times\cos(\theta)$, ce qui nous donne $1=\frac{3}{2}\times\cos(\theta)\Leftrightarrow\cos(\theta)=\frac{2}{3}$.

b est fausse, car $LE=\frac{\sqrt{2}}{2}$ (demi-diagonale d'un carré de côté 1) et donc par Pythagore : $LH=\sqrt{\frac{3}{2}}$.

c est juste : ici on a donc $\ell=\theta\sqrt{\frac{3}{2}}=\theta\frac{\sqrt{6}}{2}$; comme $\cos(\theta)=\frac{2}{3}>\frac{1}{2}$, on a $\theta\in\left[0;\frac{\pi}{3}\right]$ d'où $0<\ell<\pi\frac{\sqrt{6}}{6}$.

d est fausse, car FLE est un quart du carré $FLBC$ donc son aire vaut $\frac{1}{4}$.

Le volume du prisme est donc $\frac{1}{4}\times 1=\frac{1}{4}$.