

0.1 Lire les mathématiques

On ne communique que la forme et non le contenu.

Lecture d'expressions symboliques

La manière de dire/lire les symboles est un vaste champ de questions (et de travail potentiel) : « $f(x)$ » se lit « f de x », « $2 \times (x + 3)$ » se lit « deux fois [petit silence] x plus trois », ou « 2 facteur de x plus 3 », ou « le produit de la somme de x et trois par deux ». Comment dire « $(1 + x)^2$ » sans ambiguïté ? « \leq » peut se lire « inférieur ou égal à », mais parfois « inférieur », et peut se conjuguer à la lecture (« si a était inférieur à 0 » par exemple).

La lecture des fractions (« 3 septièmes », « 3 sur 7 »), des notations en géométrie (« $[AB]$ » se lit parfois « segment AB » ou plus simplement « AB »... comme « (AB) » ou « AB »)... n'est pas naturelle, elle doit se travailler à travers des activités spécifiques (lectures, dictées, situations de communication). C'est surtout dans le cadre d'une réelle activité mathématique qu'elle peut devenir fonctionnelle et naturelle.

Les divers aspects importants du langage : la dimension cognitive, la **dimension expressive** et la **dimension communicative**.

Recanati, Intension

Les pensées sont donc des combinaisons de concepts, de même que les phrases sont des combinaisons de mots. [...] Si une pensée n'était que la somme de ses constituants, la pensée que

$5 + 3 = 8$ serait la même que pensée que $8 + 5 = 3$

L'identité des constituants compte, mais leur position dans la structure **compte aussi**. JJD : on observera la commutativité dans le produit ou dans la différence « sémantique » renvoie non à la forme (la structure), mais au sens, au contenu.

Beaucoup d'auteurs emploient « référence » exclusivement pour la relation spécifique en vertu de laquelle certaines expressions servent à identifier ce dont on parle.

Carnap, tout comme Frege d'ailleurs, dirait que [...] la propriété d'avoir trois angles et celle d'avoir trois côtés[...] ne sont pas objectivement distinctes [...] **les deux expressions ont la même intension**. NdT (attention à l'orthographe intension).

Coexistence d'expressions formalisées et d'expressions relevant de la langue courante.

Les différentes expressions, dans lesquelles n désigne un entier, « n est pair », « n est divisible par 2 », « n est un multiple de 2 », « n s'écrit sous la forme $2k$ avec k entier », « il existe un entier k tel que $n = 2k$ », « $\exists k \in \mathbb{Z} n = 2k$ » sont autant d'expressions normées utilisant de façon plus ou moins forte la langue naturelle, les premières pouvant être écrites ou dites (et pouvant être une verbalisation de la dernière). Les expressions sont figées, mais supportent quelques variations, notamment à l'oral. On conjugue les verbes par exemple « si n était pair, il serait divisible par 2 ». On peut aussi bien être amené à ajouter un adverbe au sein de la proposition « n est effectivement un multiple de 2 ». Cela peut apporter un certain confort d'expression tout en compliquant le lien avec les objets formels décrits et manipulés. Il n'est pas certain par exemple qu'un élève interprète la phrase « n s'écrit sous la forme $2k$ avec k entier » comme l'affirmation, entre autres, de l'existence d'un nombre.

De même, un élève distinguera-t-il dans les phrases suivantes des usages radicalement différents du « **si ...alors ...** » ? Dans « si $ab = 0$ alors $a = 0$ ou $b = 0$ » l'expression « si ...alors ... » exprime une implication : on peut en écrire la contraposée, « $ab = 0$ » est une condition suffisante de vérité de « $a = 0$ ou $b = 0$ », on utilise une expression de la langue courante pour formuler une proposition mathématique (implication). Dans « si y est non nul, alors on a $\frac{x}{y} = \frac{2x}{2y}$ » le « si ...alors ldots » exprime une condition de sens (usage proche de « si tu as faim, alors tu peux te servir dans le frigo »), il n'y a pas de lien avec une implication, cela n'a pas de sens

de chercher une contraposée.

De même, quel sens donnera un élève aux « *un* » de « *un* carré est *un* rectangle » (« tout carré est un rectangle », « les carrés sont des rectangles »), « un nombre positif est plus grand qu'un nombre négatif » (« tout nombre positif est plus grand que tout nombre négatif »), ou « un nombre positif est le carré d'un nombre positif » (« pour chaque nombre positif il existe un nombre positif dont il est le carré »)? Quel sens donne-t-il aux mots « quelconque », « donné », « fixé » utilisés dans une phrase mathématique?

Enfin, l'une des caractéristiques des usages de **la langue en mathématiques est liée à la concision** recherchée. Ainsi, certaines formulations mathématiques doivent dans un premier temps être « dépliées » pour en permettre la compréhension. Par exemple, la phrase « les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu » nécessite d'être reformulée pour expliciter les relations qu'elle décrit : il s'agit de mettre au jour le fait que les diagonales d'un parallélogramme ont nécessairement un point d'intersection, elles ont chacune un milieu et ces trois points sont confondus. Les implicites sont ainsi extrêmement nombreux dans les pratiques langagières des mathématiciens et peuvent amener des malentendus avec les élèves; citons par exemple le fait que la quantification universelle des implications est rarement explicitée (tout lecteur initié aura lu la phrase « si $ab = 0$ alors $a = 0$ ou $b = 0$ » ci-dessus de la façon suivante : « Quels que soient les réels a et b , si $ab = 0$ alors $a = 0$ ou $b = 0$ »).

Selon Frege, dans un énoncé comme

Ce polynôme est $5x^2 - 4$ le verbe « être » n'a pas la même fonction logique que le verbe « être » dans *Ce polynôme est du second degré*

NdT : affectation et égalité

Quelle est l'extension de la description « le président des USA »? [...] Le président aurait pu être un Démocrate ... NdT Le triangle aurait pu être rectangle ...; L'opérateur modal « aurait pu » introduit une situation hypothétique

Dans la mesure où les vérités mathématiques sont nécessaires et non contingentes, une description comme « la racine cubique de 27 » a toujours la même extension (à savoir 3), quelle que soit la situation considérée. Cette description est donc rigide de facto . Mais **les noms propres sont rigides en un sens plus fort** – ils sont rigides de jure : leur rigidité est une conséquence de leur caractéristique directement référentielle, qui fait que leur extension est fixée, comme dit Kaplan, « avant la rencontre avec la situation d'évaluation » et ne peut donc pas varier en fonction de celle-ci.

L'extension de « je » est fixée dès le niveau du contenu et donc elle ne varie pas en fonction de la situation d'évaluation, quand bien même le contenu de « je », lui, varie en fonction du contexte d'énonciation.

Négation

« Quelqu'un est venu » ou « Personne n'est venu », c'est le terme quantifiant (« quelqu'un », « personne ») qui remplit véritablement le rôle prédicatif : « est venu », quant à lui, ce trouve déchu de ce rôle. [...] nier « Quelqu'un est venu » (par exemple dire : « Il n'est pas vrai que quelqu'un est venu ») ne revient pas du tout à affirmer que « quelqu'un n'est pas venu »; cela revient à affirmer que personne n'est venu. La négation se porte ici non pas sur le prédicable « est venu », mais plutôt sur « quelqu'un », que la négation transforme en « personne »

Au début j'ai fait comme s'il y avait seulement deux options pour **la sémantique** : une sémantique référentielle, **qui associe aux mots des choses** (leur dénotation), et **une sémantique cognitive, qui associe aux mots des représentations mentales**. [...] Il y a **une troisième option** : on peut Il y a une troisième option : **on peut associer le mot** et l'emploi qui en est fait – **sa fonction**.

La syntaxe s'occupe des phrases, **la pragmatique s'occupe des actes de parole**, et la sémantique met en rapport de façon systématique phrase et acte de parole en associant à chaque phrase un potentiel d'acte de pa-

role.

La compétence sémantique des utilisateurs du langage leur permet de déterminer, mécaniquement pour ainsi dire, le sens de toute phrase bien formée du langage.

L'interprétation d'une phrase donnée [...] [n'est susceptible d']aucune révision tant que les règles sémantiques n'ont pas été révisées. En d'autres termes, l'**interprétation sémantique est « monotone »**.

Dans ces circonstances, il comprend aisément que j'essaie de lui communiquer quelque chose, mais le problème pour lui est d'arriver à comprendre ce que j'essaie de lui communiquer et que le dessin est censé lui révéler.

Dire « Il pleut » c'est dire qu'il pleut là où on se trouve (ou dans tel autre lieu contextuellement saillant). Il est donc fait référence à un lieu, mais **la référence** au lieu en question **reste implicite** et n'est pas véhiculée par un constituant dans la phrase (contrairement à ce qui se passe si l'on dit : « Il pleut ici » [...]. Si c'est vrai, alors il y a plus dans le sens du tout que l'on peut dériver du sens des parties, et ce « plus » vient du contexte.

Ainsi, La représentation mentale associée à « Il pleut » inclut-elle la représentation (mentale, mais linguistiquement non exprimée) d'un lieu. [...] Dire que l'on pense avec des mots du langage public, ce n'est pas nécessairement dire que l'on pense avec les mots que l'on énonce. **On peut avoir d'autres mots « en tête » que ceux que l'on énonce.**

Les linguistes parlent de « **factivité** » lorsqu'une phrase complexe incluant une proposition[...] implique la proposition en question.[...] Si quelqu'un me dit « Pierre sait très bien que le facteur ne passera pas aujourd'hui », je puis inférer[...] que le facteur ne passera pas aujourd'hui. En revanche, « dire » n'est pas factif. Si l'on m'annonce « Pierre dit que le facteur ...»[...] **le locuteur présuppose la vérité de la proposition enchâssée**

Il y a donc deux sortes de « **vouloir dire** » : le vouloir dire naturel – par exemple, ce que les nuages veulent dire, ou ce que cette fumée veut dire –[...] . En revanche, le « vouloir dire non naturel » [...] « Paul veut dire qu'il va pleuvoir » attribue à Paul une certaine intention communicative

<http://mathilde.local/intentionnalite/>

<http://mathilde.local/quiproquo/>

La girouette « indique » la direction du vent même s'il n'y a personne pour voir et utiliser cette indication. [...] **La notion de signe**[...] fait intervenir [...] l'interprétant pour qui le signe est signe. **La définition traditionnelle du signe est ainsi : quelque chose qui représente (veut dire?) quelque chose pour quelqu'un.**

Un utilisateur peut faire un usage erroné du signe – il peut interpréter de travers la trace et y voir autre chose que ce qu'elle est – mais cela n'affecte en rien la signification objective de la trace.

Mais le signe indique toutes sortes de choses : la trace dans la neige indique non seulement qu'un castor est passé par là, mais aussi qu'il n'a pas neigé depuis le passage di castor, que celui-ci avait un certain poids,[...] En ce point on rencontre la transition majeure qui nous permet de quitter le domaine étroit de la signification naturelle. À partir du moment où A reçoit une certaine fonction, il peut **dysfonctionner**. Soit un thermomètre : la hauteur de la colonne de mercure indique la température [...] p 141 Mais il y a des thermomètres qui sont défectueux [...] Pour l'utilisateur, le thermomètre défectueux est censé indiquer la température, et c'est pourquoi on le juge défectueux lorsqu'il ne le fait pas.

Les représentations que notre analyse présuppose sont les représentations mentales des interprètes. Dans le cas du fabricant de thermomètre, il a l'intention que l'objet qu'il fabrique indique la température; ceux qui achètent le thermomètre ou plus généralement ceux qui l'utilisent s'attendent à ce qu'il indique la température.

Selon Frege, ce à quoi une expression linguistique fait référence, ce qu'elle dénote, dépend du sens de cette expression. **Le sens détermine la référence.** [...] par exemple le 42e président des États-Unis d'Amérique.

[...] **L'article défini indique qu'un individu unique est censé satisfaire la condition**

Il y a des choses que je ne connais que de façon théorique, « par description ». Ainsi je sais qu'il y avait un parapsychologue dans l'équipe de Karpov ...

JJD Je sais que Pythagore était grec

Ce qui me permet de penser aux objets dont j'ai connaissance directe, en revanche, ce n'est pas le fait que je dispose d'une description de ces objets, si détaillée soit-elle, mais **le fait que j'entretiens des relations avec eux**.

Force est de reconnaître que souvent nous pensons à des choses ou à des personnes que nous sommes incapables de décrire, ou au moins de décrire de façon « singularisante », mais dont nous n'avons cependant aucune expérience sensible de quelque ordre que ce soit.

Pour comprendre l'énoncé « Je serai ici demain », il ne suffit pas de comprendre le contenu descriptif véhiculé – à savoir le fait que la personne qui énonce cette phrase se trouvera au lieu de l'énonciation le lendemain de l'énonciation. Il faut identifier la personne qui énonce la phrase, ainsi que le lieu et le moment de l'énonciation en question.

Lorsque je parle d'Aristote, **je fais référence** à Aristote non pas du fait de la façon dont je me représente Aristote (car ma représentation pourrait être erronée ou trop vague) mais **du fait que mon emploi du nom est historiquement associé**, à travers une chaîne causale, à l'individu Aristote.

La signification de « je » renvoie à la relation entre une occurrence de « je » et la personne qui prononce cette occurrence, la signification de « ici » à la relation entre une occurrence de ce mot et le lieu où est prononcée cette occurrence, etc.

À cause de son daltonisme, le chien ne peut pas voir que Kaplan porte une chemise rouge, et il n'a pas d'autre moyen de se représenter ce fait; mais le collègue daltonien de Kaplan, grâce au langage, peut se représenter ce fait et même le fait qu'Aristote portait une chemise rouge.

Si donc un sujet – appelons-le Marcel – croit que Paul est oculiste tout en doutant qu'il soit ophtalmologiste, c'est que pour lui « Paul est oculiste » et « Paul est ophtalmologiste » expriment des pensées différentes. Dans la mesure où **ces phrases expriment pour lui des pensées distinctes**, Marcel ne se contredit pas s'il affirme que Paul est oculiste tout en refusant d'admettre qu'il soit ophtalmologiste.

Imaginons que, par la fenêtre de gauche, je voie l'arrière d'une voiture bleue et que par la fenêtre de droite je vois l'avant d'une voiture rouge. J'infère naturellement qu'il y a deux voitures, et je peux faire référence à chacune d'elles au moyen du démonstratif complexe « cette voiture » [...]

S'il apparaît qu'il s'agit d'une seule et même voiture bicolore, ma croyance ne peut pas être vraie, mais elle n'est pas contradictoire puisque je me représente la voiture sous deux modes de présentation différents.

Frege, comme on vient de le voir, **deux pensées sont distinctes s'il est rationnellement possible d'accepter l'une et de rejeter l'autre** (au même moment).

Dans la conception que je défends, [...] **les concepts** ou tout au moins ceux qui renvoient à un aspect du monde, **sont comme des « entrées » dans l'encyclopédie mentale** du sujet : ce sont des structures de données servant à emmagasiner les informations obtenues en vertu d'une certaine relation au référent

Il faut distinguer trois choses : le type, l'instance et l'occurrence.

Un type de concept est une classe (de concepts) définie par une certaine fonction. [...] Ainsi il y a le type « ici » qui exploite la relation spéciale entre le sujet et le lieu où il se trouve.

Une « instance » du type fait référence, en vertu du fait que le sujet qui possède ce concept se trouve dans la relation appropriée à un lieu spécifique **acquière de ce fait le statut de référent**. [...] Une instance de type est

donc une structure de données particulière, liée à un contexte particulier. [...] **Chaque instance est susceptible d'une pluralité d'occurrences**, une occurrence étant l'événement mental consistant dans le fait qu'un concept (**instance**) **est activé**, donnant ainsi accès aux informations stockées sous ce concept.

On peut se représenter un concept non descriptif comme un dossier mental. Lorsque j'acquies d'autres informations sur un objet particulier, j'ouvre un dossier le concernant; si par la suite j'acquies d'autres informations concernant l'objet en question, je les joins au dossier. L'intérêt de la notion de dossier est qu'on peut dissocier le dossier lui-même et l'information qu'il contient.

Un objet est familier si et seulement si des rencontres répétées avec cet objet ont été créées chez le sujet une disposition à le reconnaître. Il faut noter toutefois que beaucoup d'objets familiers sont des objets au sujet desquels nous possédons des informations acquises par la communication.