Démonstration : Par récurrence

- P(0) est vraie puisque $(1+a)0 \geq 1+0a$ pour tout $a \in \mathbb{R}_+$
- Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

  $$\mathrm{P}(n) \rightarrow \mathrm{P}(n+1)$$

  Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que$\mathrm{P}(n)$ est vraie donc :

  $$(1+a)^n \geq 1+na$$

  Or,$1+a>0$, donc en multipliant l'inégalité ci-dessus par $(1+a)$, on obtient :

  $$(1+a)^{n+1} \geq (1+na)(1+a)$$

  Or

  $$(1+na)(1+a) = 1+a+na+na^2 = 1+(n+1)a+na^2$$

  et comme $na^2>0$:

  $$(1+na)(1+a) \geq 1+(n+1)a$$

  D'où

  $$(1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1)a$$

  $\mathrm{P}(n+1)$ est vrai.

Conclusion : on a :

$$\begin{cases} \mathrm{P}(0) \\ \forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{P}(n) \rightarrow \mathrm{P}(n+1) \end{cases}$$

Donc : $\boxed{\forall a \in [0;+\mathrm{inf}], (1+a)^n \geq 1+na}$