3.6 Un superbe exercice

1) Soit $(u_n)_{u\in\mathbb{N}}$ la suite géométrique décroissante définie par : $\begin{cases} u_0 + u_1 + u_2 = 999 \\ u_0 \times u_1 \times u_2 = 729000 \end{cases}$

Déterminer u_0, u_1 et u_2

2) Soit $\text{S} = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$

Déterminer n tel que $\text{S} = 999999$.

1) On peut dire que $u_1 = u_0 \times q$ et $u_2 = u_0 \times q^2$.
On peut aussi dire $u_0 = \dfrac{u_1}{q}$ et $u_2 = u_1 \times q$.

On a alors $\dfrac{u_1}{q} \times u_1 \times \left(u_1 \times q\right) = 729000$

Ainsi, $u_1^3 = 729000$ et $u_1 = 729000^{\frac{1}{3}}$.

D'où $u_1 = 90$

On sait que $u_0 + u_1 + u_2 = 999$

Il vient que $\dfrac{90}{q} + 90 + 90q = 999$.

$\dfrac{90}{q} + 90q = 909$

$\dfrac{90 + 90q^2}{q} = 909$

$90q^2 + 90 = 909q$

$90q^2 - 909 + 90 = 0$

Donc $q = \dfrac{1}{10}$ ou $q = 1$.

Cependant, on sait que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Donc $q \neq 10$.

Ainsi, $q = \dfrac{1}{10}$.

On a donc $u_0 = \dfrac{u_1}{q} = \dfrac{90}{\frac{1}{10}} = 900$, $u_1 = 90$ et $u_2 = u_1 q = 90 \times \dfrac{1}{10} = 9$.

2) On cherche à trouver n tel que $u_0 \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} = 999{,}999$

$$900\frac{1-\left(\frac{1}{10}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{10}} = 999{,}999$$

précision : 1 - 1/10 = 0,9

$$1000\left[1-\left(\frac{1}{10}\right)^{n+1}\right] = 999{,}999$$

$$1-\left(\frac{1}{10}\right)^{n+1} = 0{,}999999$$

$$-\left(\frac{1}{10}\right)^{n+1} = -0{,}000001$$

$$\left(\frac{1}{10}\right)^{n+1} = 0{,}000001$$

$$n+1 = 6$$

$$n = 5.$$