TD suites géométriques

Exercice 1.

1) Dans chacun des cas, calculer les 1er termes de la suite (v_n), puis justifier que la suite n'est pas géométrique.

$a)$ $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = 5^n - n$ $\qquad b)$ $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \dfrac{2^n - 1}{2^n + 1}$ $\qquad c)$ $\begin{cases} v_0 = -2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \dfrac{v_n}{n+1} \end{cases}$

2) Dans chacun des cas, exprimer le terme u_{n+1} en fonction de n, puis montrer que les suites sont géométriques en précisant la raison et le 1er terme.

$a)$ $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \dfrac{2^n}{3^{n+1}}$ $\qquad b)$ $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = 2^{3n-1}$

Exercice 2.

1) (v_n) est géométrique de raison q.
   - *a)* $v_0 = 3$ et $q = 5$. Calculer v_3 et v_{10}.
   - *b)* $v_5 = 486$ et $v_7 = 4374$ et $q > 0$. Calculer v_0 et v_{10}.
2) (u_n) est géométrique telle que $u_4 = 5$ et $u_5 = 7{,}5$. Quelle est la raison q ?
3) (t_n) est géométrique telle que $t_4 = 6$ et $t_6 = 54$. Quelle peut être la raison q ?
4) (w_n) est une suite géométrique telle que $w_4 = -4$ et $w_7 = -32$.
   - *a)* Calculer la raison q
   - *b)* Exprimer w_n en fonction de n
   - *c)* Calculer w_{13}

Exercice 3.

Dans la colonne A d'une feuille de calcul, figurent les termes consécutifs d'une suite géométrique dont le premier terme se trouve dans la cellule A1.
Déterminer, par le calcul, le contenu de chacune des cellules A8 et A15.

	A
21	3 145 728
22	6 291 456
23	12 582 912
24	25 165 824
25	50 331 648

Exercice 4.

1) (u_n) est une suite géométrique de raison 4 et de 1er terme $u_0 = -2$. Calculer $S = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{10}$
2) (v_n) est une suite géométrique de raison -3 telle que $v_5 = 1$. Calculer $S = v_5 + v_6 + v_7 + \ldots + v_{20}$
3) (w_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{3}{4}$ telle que $w_2 = 5$. Calculer $S = w_0 + w_1 + w_2 + \ldots + w_7$

Exercice 5.

Pour tout entier n, on pose $w_n = 2^n - 2n + 2$.

1) Vérifier que la suite (w_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.

Pour tout entier n, on pose $u_n = -2n + 2$ et $v_n = 2^n$.

2) Montrer que l'une est arithmétique et que l'autre est géométrique : on précisera les raisons et les premiers termes de chacune des suites.
3) Calculer la somme $S = w_0 + w_1 + w_2 + \ldots + w_{10}$

Exercice 6.

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{4} + 3 \end{cases}$.

1) Calculer les 3 premiers termes de la suite. (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ?

On pose, pour tout entier n, $v_n = u_n - 4$.

2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \frac{1}{4} v_n$, puis en déduire la nature de la suite (v_n)

3) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n

Problème 1

Julie a acheté un cactus de 1 m de haut qui grandit de 5 cm tous les mois. Claire a acheté un ficus de 50 cm de haut dont la taille augmente de 5% tous les mois. On désigne par u_n la taille en mètres du cactus au bout de n mois ($u_0 = 1$) et par v_n celle du ficus ($v_0 = 0{,}5$)

1) Pour tout entier naturel n, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. En déduire la nature de la suite (u_n) et donner l'expression de u_n en fonction de n.
2) Pour tout entier naturel n, exprimer v_{n+1} en fonction de v_n. En déduire la nature de la suite (v_n) et donner l'expression de v_n en fonction de n.
3) Quelle est la plante qui atteindra la première le plafond situé à 3,5 m de haut (les deux plantes étant posées sur le sol) ?

Problème 2

Sur un cube de 10cm de côté, on empile des cubes de plus en plus petit : le volume d'un cube (autre que le premier) est égal à la moitié du volume du cube précédent.

1) Calculer le volume du huitième cube.

2) Calculer le volume de la pyramide formée par les 10 premiers cube (à 1 mm^3 près)

Problème 3.

Un jardinier amateur tond sa pelouse tous les samedis, et recueille à chaque fois 120 litres de gazon coupé qu'il stocke dans un bac à compost de 300 litres.

Chaque semaine, les matières stockées perdent par décomposition, ou prélèvement, les trois quarts de leur volume.

On appelle v_n, le volume en litres stocké le n-ième samedi de tonte. On a donc : $v_1 = 120$.

1) Justifier que pour tout entier $n \geq 1$, $v_{n+1} = 120 + \frac{1}{4} v_n$.

2) Cette suite est-elle arithmétique ? géométrique ?

On définit, pour tout entier $n \geq 1$, le nombre t_n par $t_n = 160 - v_n$.

3) Démontrer que la suite (t_n) est géométrique, et préciser son premier terme et sa raison.

Exprimer t_n en fonction de n et en déduire le terme général de la suite (v_n).

4) Les conditions restant les mêmes, le bac de stockage sera-t-il un jour rempli ? on pourra utiliser la calculatrice.

Problème 4.

Une plaque d'isolant phonique absorbe 45% du son qui la traverse. Combien doit-on superposer de plaques pour que l'intensité du son soit inférieur à 1% de sa valeur initiale ?

Problème 5.

En 2010, un opérateur de téléphonie mobile avait un million de clients.

Depuis, chaque année, l'opérateur perd 10 % de ses clients, mais regagne dans le même temps 60 000 nouveaux clients.

1. On donne l'algorithme ci-dessous. Expliquer ce que l'on obtient avec cet algorithme.

```
Variables : k, N
Traitement : Affecter à k la valeur 0
             Affecter à N la valeur 1 000 000
             Tant que k < 8
                 affecter à k la valeur k+1
                 affecter à N la valeur 0,9×N+60000
                 Afficher N
             Fin Tant que
```

2. En supposant que cette évolution se poursuit de la même façon, la situation peut être modélisée par la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n, par :

$$\begin{cases} u_0 = 1000 \\ u_{n+1} = 0{,}9u_n + 60 \end{cases}$$

Le terme u_n donne une estimation du nombre de clients, en milliers, pour l'année $2010+n$.

La suite (u_n) est elle arithmétique ? Géométrique ?

3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 600$.
   a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,9.
   b. Déterminer l'expression de v_n en fonction de n.
4. Montrer que pour tout entier naturel n, on a $u_n = 400 \times 0{,}9^n + 600$.
5. Exprimer $\sum_{i=0}^{n} u_i$ puis $\sum_{i=0}^{n} v_i$ en fonction de n.
6. On suppose que la compagnie gagne en moyenne 120 € par an et par client. Quelle somme la compagnie peut-elle prévoir comme chiffre d'affaire entre 2010 et 2014 ?

Problème 6.

Aux entreprises Galtier et Cie, les employés ont le choix entre deux contrats : le salaire initial est toujours de 1000€ par mois, puis une augmentation de 10€ tous les mois pour le contrat A, et une augmentation de 0,5% tous les mois pour le contrat B.

On appelle a_n, le salaire mensuel d'un employé au bout de n mois avec le contrat A, b_n avec le contrat B.

Exprimer a_n et b_n en fonction de n.

2) Maxime Y. est en CDD de 18 mois. Quel contrat doit-il choisir ?

3) Vincent H. et Alexandre T. ont passé 40 ans dans l'entreprise, mais Vincent avait le contrat A et Alexandre le contrat B. Quelles sommes ont-ils gagnées en tout ?

4) Au bout de combien de temps le salaire d'Alexandre a-t-il dépassé celui de Vincent ?

5) Ecrire un algorithme qui confirme votre calcul précédent.

Problème 7.

Le contrat de location d'un bien immobilier fixe le loyer mensuel à 500€ la première année, réévalué de 2% chaque année à la date anniversaire du contrat.

Pour tout entier naturel n, on note l_n, le montant en €, du loyer mensuel la n[ième] année après la signature du contrat. Ainsi $l_0 = 500$.

1) Calculer l_1 et l_2.

2) Exprimer l_{n+1} en fonction de l_n. En déduire la nature de la suite (l_n).

3) Calculer le montant total des loyers durant 9 année de location. Arrondir au centime d'euro.

4) Avec la calculatrice, déterminer l'année à partir de laquelle le loyer mensuel dépassera 800€.