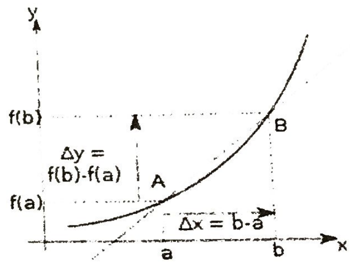
I. Taux de variation d'une fonction.

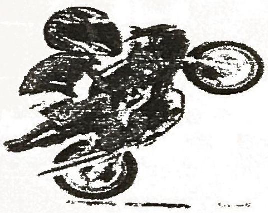
> Définition : Soit f, une fonction définie sur D_f et a et b, deux réels de D_f,
> on définit le taux d'accroissement de f entre a et b par le rapport... $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Remarque : si f est une fonction affine, le taux de variation est constant : il correspond au coefficient directeur de la représentative de la fonction (vu en 3ème). Si f est constante, le taux de variation est nul.

Interprétation graphique : Soient $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$, deux points de la courbe C_f représentant la fonction f dans un repère du plan.
Le taux d'accroissement de la fonction f entre a et b est le **coefficient directeur** de la droite (AB)



$coefficient_{(AB)} = \ldots \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ Δ : différence



Interprétation cinématique : Soit un mobile M, se déplaçant sur un axe $(O;\vec{i})$. On repère la position du mobile à l'instant t par la distance $d(t)$ entre ce point et l'origine O de l'axe.
Le taux de variation de la fonction d entre les instants t_0 et t_1 ($t_0 \neq t_1$) est égal à la **vitesse moyenne** du mobile entre les instants t_0 et t_1.

$v_m = \frac{d(t_1)-d(t_0)}{t_1-t_0} = \frac{\text{distance parcourue entre } t_0 \text{ et } t_1}{\text{durée écoulée entre } t_0 \text{ et } t_1} = \frac{\Delta d}{\Delta t}$

II. Nombre dérivé d'une fonction en un point

On considère une fonction f définie sur son intervalle de définition D_f. Soit $a \in D_f$, et h, un réel non nul tel que $a+h \in D_f$. Le taux d'accroissement de f entre a et $a+h$ est $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

Exemple :
Taux d'accroissement de la fonction carrée entre 1 et $1+h$:

$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{(1+h)^2-1}{h} = \frac{1+2h+h^2-1}{h} = \frac{h(2+h)}{h} = 2+h$

```
def f(x):
    return x**2
def taux(f):
    L=[10**(-i) for i in range(5)]
    T=[f(1+h)-f(1)/h for h in L]
    return T
```

lorsque h se rapproche de 0 (c'est-à-dire h prend des valeurs de plus en plus proche de 0), les nombres $h+2$ se rapprochent de la valeur 2. On dit alors que le nombre $h+2$ tend vers 2 lorsque h tend vers 0.

Définition : nombre dérivé

Soit f une fonction, D son ensemble de définition et $a \in D$.

S'il existe un réel L tel que le taux d'accroissement $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ se rapproche de L lorsque h est très proche de 0, alors :

- On dit que la fonction f est dérivable en a
- Le réel L est appelé nombre dérivé de f en a noté $f'(a)$
- On peut écrire $\lim \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$

Exemples :

Dérivabilité de $f : x \mapsto x^2 - 3$ en $a = 2$.

taux d'accroissement de la fonction f entre 2 et $2+h$

$$\frac{f(2+h)-f(2)}{(2+h)-2} = \frac{(2+h)^2-3-1}{h} = \frac{4+4h+h^2-4}{h} = \frac{h(4+h)}{h} = 4+h$$

$\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{(2+h)-2} = 4$. Donc f est dérivable en 2, et $f'(2) = 4$

l admet un nb dérivé en 2

Dérivabilité de $f : x \mapsto \frac{1}{x-1}$ en $a = 0$.

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{(0+h)-0} = \frac{\frac{1}{h-1}+1}{h} = \frac{\frac{1+h-1}{h-1}}{h} = \frac{h}{h-1} \times \frac{1}{h} = \frac{1}{h-1}$$

$\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{(0+h)-0} = -1$ Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = -1$

Dérivabilité de $f : x \mapsto \sqrt{x-1}$ en $a = 1$.

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{(1+h)-1} = \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}}$$

lorsque h tend vers 0, $\frac{1}{\sqrt{h}}$ devient de plus en plus grand (donc ne se rapproche pas d'un nombre L.).

On dit alors que f n'est pas dérivable en 1 mais peut-être dérivable en une autre valeur.

Interprétation cinématique : Le taux de variation de la fonction d entre les instants t_0 et $t_1 = t_0 + h$ (avec $h \neq 0$) est $v_m(h) = \dfrac{d(t_0 + h) - d(t_0)}{h}$ (vitesse moyenne entre les instants t_0 et t_1).

Si ce taux de variation admet, lorsque h tend vers 0, une limite réelle, alors la fonction d est dérivable en t_0 et le nombre dérivé $d'(t_0)$ de la fonction d en t_0 est la **vitesse instantanée** du mobile à l'instant t_0.

III. Interprétation géométrique : tangente à une courbe C_f .

Approche intuitive de la tangente : discuter de situations concrètes.

Le crash d'Ayrton Senna à Imola (01/05/1994)

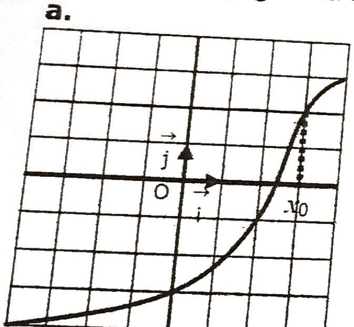
https://www.youtube.com/watch?v=T9hQwSa1vxg

Tracés de tangente…C_f

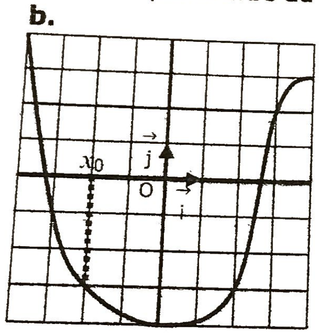
EXERCICE 1

Tracer « au jugé » la tangente à chaque courbe au point x_0

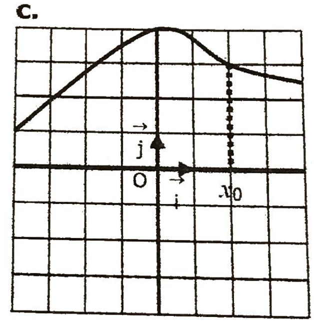
a.



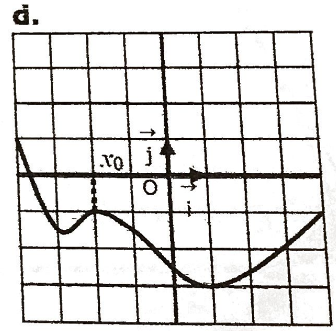
b.



c.



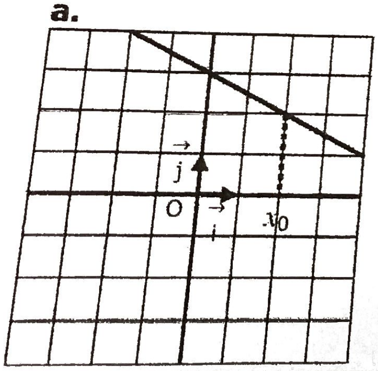
d.



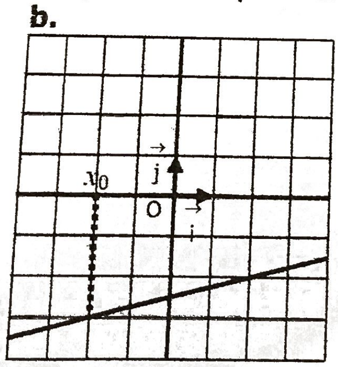
EXERCICE 2

Tracer une courbe de fonction qui admette pour tangente au point x_0 la droite donnée.

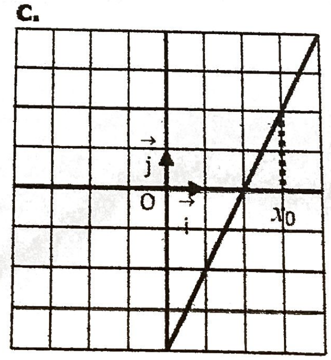
a.



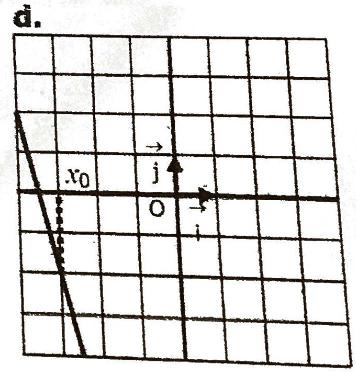
b.



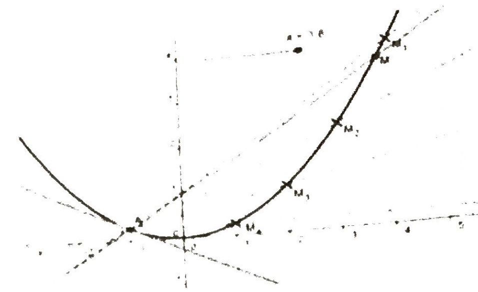
c.



d.

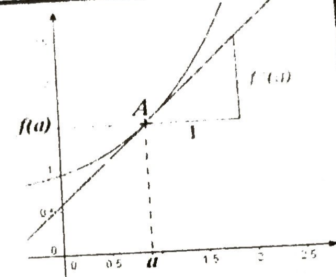


…imation géogébra (tangente en a.ggb) : la droite (AM) est sécante à C_f en A, d'abscisse a et M d'abscisse $a+h$. Le coefficient directeur de la droite (AM) est le taux d'accroissement $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ entre A et M.



Lorsque h tend vers 0, le point M se rapproche du point A.
Dire que le fonction f est dérivable en a revient à dire que la droite (AM) se rapproche d'une droite « limite » non verticale. Cette droite est appelée tangente à C_f au point d'abscisse a.

Définition : tangente



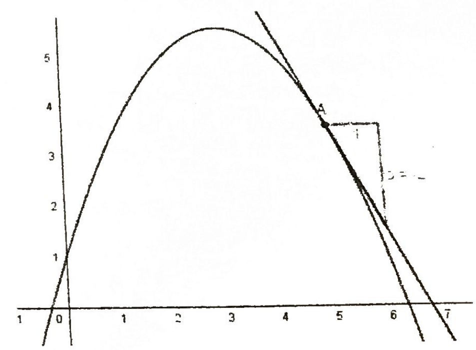
Exemple : Soit $f(x)=-\dfrac{1}{2}x^2+3x+1$. Calcul du nombre dérivé de f en 5.

$$\frac{f(5+h)-f(5)}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(5+h)-f(5)}{h}=$$

Donc f est dérivable en 2 et $f'(2)=4$

La tangente à C_f au point d'abscisse 5 a pour coefficient directeur



Propriété : équation réduite de la tangente à C_f.
La tangente à la courbe C_f au point d'abscisse a a pour équation cartésienne : $y=f'(a)(x-a)+f(a)$.

Démonstration (BO) :

Avec l'exemple précédent, déterminons l'équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 5 .

Avec et

La tangente à C_f au point d'abscisse 5 a pour équation….