1 Fonctions dérivées

1.1 Exemples

1.1.1 Exemple nº 1

Soit la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & f(x) = x^2 \end{array}$

On a $\mathrm{D}_f = \mathbb{R}$.

Soit $x_0 \in \mathrm{D}_f$.

Montrons que f est dérivable en x_0.

- Calcul du taux d'accroissement :

$$
\begin{aligned}
\mathrm{T}(h) &= \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \\
&= \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h} \\
&= \frac{x_0^2 + 2x_0h + h^2 - x_0^2}{h} \\
&= \frac{2x_0h + h^2}{h} \\
&= \frac{h(2x_0+h)}{h} \\
&= 2x_0 + h \qquad\qquad \text{si } h \neq 0
\end{aligned}
$$

- Limite du taux d'accroissement :

$$\lim_{h \to 0} \mathrm{T}(h) = \lim_{h \to 0} (2x_0 + h) = 2x_0$$

  Donc f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = 2x_0$.

- Fonction dérivée :

$$
f' : \begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} & & \\ x_0 & \longmapsto & f'(x_0) & = & 2x_0 \\ x & \longmapsto & f'(x) & = & 2x \end{array}
$$

On a $\mathrm{D}_{f'} = \mathbb{R}$

1.1.2 Exemple n° 2

Soit la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & f(x) = x^2 - 2x - 3 \end{array}$

On a $D_f = \mathbb{R}$.

Soit $x_0 \in D_f$.

Montrons que f est dérivable en x_0.

- Calcul du taux d'accroissement :

$$\begin{array}{rcl} T(h) & = & \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \\ & = & \dfrac{\left[(x_0+h)^2 - 2(x_0+h) - 3\right] - \left(x_0^2 - 2x_0 - 3\right)}{h} \\ & = & \dfrac{x_0^2 + 2x_0 h + h^2 - 2x_0 - 2h - 3 - x_0^2 + 2x_0 + 3}{h} \\ & = & \dfrac{2x_0 h + h^2 - 2h}{h} \\ & = & \dfrac{h(2x_0 + h - 2)}{h} \\ & = & 2x_0 + h - 2 \qquad \text{si } h \neq 0 \end{array}$$

- Limite du taux d'accroissement :

$$\lim_{h \to 0} T(h) = \lim_{h \to 0} (2x_0 + h - 2) = 2x_0 - 2$$

Donc f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = 2x_0 - 2$.

- Fonction dérivée :

$$f' : \begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} & & \\ x_0 & \longmapsto & f'(x_0) & = & 2x_0 - 2 \\ x & \longmapsto & f'(x) & = & 2x - 2 \end{array}$$

On a $D_{f'} = \mathbb{R}$

1.1.3 Exemple n° 3

Soit la fonction $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & f(x) = \dfrac{1}{x} \end{array}$

On a $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{0\right\}$.

Soit $x_0 \in D_f$.

Montrons que f est dérivable en x_0.

- Calcul du taux d'accroissement :

$$\begin{aligned} T(h) &= \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \\ &= \frac{\dfrac{1}{x_0+h} - \dfrac{1}{x_0}}{h} \\ &= \frac{\dfrac{x_0 - (x_0+h)}{x_0(x_0+h)}}{h} \\ &= \frac{\dfrac{x_0 - x_0 - h}{x_0(x_0+h)}}{h} \\ &= \frac{\dfrac{-h}{x_0(x_0+h)}}{h} \\ &= \frac{-h}{x_0(x_0+h)} \times \frac{1}{h} \\ &= \frac{-1}{x_0(x_0+h)} \qquad \text{si } h \neq 0 \end{aligned}$$

- Limite du taux d'accroissement :

$$\lim_{h \to 0} T(h) = \lim_{h \to 0} \frac{-1}{x_0(x_0+h)} = \frac{-1}{x_0^2}$$

Donc f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \dfrac{-1}{x_0^2}$.

- Fonction dérivée :

$$f' : \begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} & & \\ x_0 & \longmapsto & f'(x_0) & = & \dfrac{-1}{x_0^2} \\ x & \longmapsto & f'(x) & = & \dfrac{-1}{x^2} \end{array}$$

On a $D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \left\{0\right\}$.

1.1.4 Exemple n° 4

Soit la fonction $f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & f(x) = \dfrac{x-1}{x+1} \end{array}$

On a $\mathrm{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{-1\right\}$.

Soit $x_0 \in \mathrm{D}_f$.

Montrons que f est dérivable en x_0.

- Calcul du taux d'accroissement :

$$\begin{aligned}
\mathrm{T}(h) &= \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \\
&= \frac{\dfrac{(x_0+h)-1}{(x_0+h)+1} - \dfrac{x_0-1}{x_0+1}}{h} \\
&= \frac{\dfrac{(x_0+h-1)(x_0+1) - (x_0-1)(x_0+h+1)}{(x_0+1)(x_0+h+1)}}{h} \\
&= \frac{\dfrac{x_0^2 + x_0 + hx_0 + h - x_0 - 1 - \left(x_0^2 + hx_0 + x_0 - x_0 - h - 1\right)}{(x_0+1)(x_0+h+1)}}{h} \\
&= \frac{\dfrac{x_0^2 + x_0 + hx_0 + h - x_0 - 1 - x_0^2 - hx_0 - x_0 + x_0 + h + 1}{(x_0+1)(x_0+h+1)}}{h} \\
&= \frac{\dfrac{2h}{(x_0+1)(x_0+h+1)}}{h} \\
&= \frac{2h}{(x_0+1)(x_0+h+1)} \times \frac{1}{h} \\
&= \frac{2}{(x_0+1)(x_0+h+1)} \qquad\qquad \text{si } h \neq 0
\end{aligned}$$

- Limite du taux d'accroissement :

$$\lim_{h \to 0} \mathrm{T}(h) = \lim_{h \to 0} \frac{2}{(x_0+1)(x_0+h+1)} = \frac{2}{(x_0+1)^2}$$

Donc f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \dfrac{2}{(x_0+1)^2}$.

- Fonction dérivée :

$$f' : \begin{array}{rcccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} & & \\ x_0 & \longmapsto & f'(x_0) & = & \dfrac{2}{(x_0+1)^2} \\ x & \longmapsto & f'(x) & = & \dfrac{2}{(x+1)^2} \end{array}$$

On a $\mathrm{D}_{f'} = \mathbb{R} \setminus \left\{-1\right\}$.

1.1.5 Exemple nº 5

Soit la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & f(x) = \sqrt{x} \end{array}$

On a $\mathrm{D}_f = \mathbb{R}^+ = [0\,;\,+\infty[$.

Soit $x_0 \in \mathrm{D}_f$.

Montrons que f est dérivable en x_0.

- Calcul du taux d'accroissement :

$$\begin{array}{rcll} \mathrm{T}(h) & = & \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} & \\ & = & \dfrac{\sqrt{x_0+h}-\sqrt{x_0}}{h} & \\ & = & \dfrac{\left(\sqrt{x_0+h}-\sqrt{x_0}\right)\left(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}\right)}{h\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}} & \\ & = & \dfrac{x_0+h-x_0}{h\left(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}\right)} & \\ & = & \dfrac{h}{h\left(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}\right)} & \\ & = & \dfrac{1}{\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}} & \text{si } h \neq 0 \end{array}$$

- Limite du taux d'accroissement :

$$\lim_{h\to 0} \mathrm{T}(h) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h\left(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

Donc f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}$.

Attention!

f n'est pas dérivable en $\mathbf{x_0 = 0}$

f est dérivable en $\mathbf{x_0 > 0}$ et $\mathbf{f'(x_0) = \dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}}$.

- Fonction dérivée :

$$f' : \begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} & & \\ x_0 & \longmapsto & f'(x_0) & = & \dfrac{1}{2\sqrt{x_0}} \\ x & \longmapsto & f'(x) & = & \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \end{array}$$

On a $\mathrm{D}_{f'} = \mathbb{R}_*^+ =]0\,;\,+\infty[$.

1.1.6 Exemple n° 6

Soit la fonction $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & f(x) = \sqrt{x+11} - 1 \end{array}$

Il faut que $x + 11 \geqslant 0 \Longleftrightarrow x \geqslant -11$

Donc on a $\mathrm{D}_f = [-11\,;\,+\infty[$.

Soit $x_0 \in \mathrm{D}_f$.

Montrons que f est dérivable en x_0.

- Calcul du taux d'accroissement :

$$\begin{aligned}
\mathrm{T}(h) &= \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \\
&= \frac{\sqrt{x_0+h+11} - 1 - \left(\sqrt{x_0+11} - 1\right)}{h} \\
&= \frac{\sqrt{x_0+h+11} - \sqrt{x_0+11}}{h} \\
&= \frac{\left(\sqrt{x_0+h+11} - \sqrt{x_0+11}\right)\left(\sqrt{x_0+h+11} + \sqrt{x_0+11}\right)}{h\left(\sqrt{x_0+h+11} + \sqrt{x_0+11}\right)} \\
&= \frac{x_0+h+11 - (x_0+11)}{h\left(\sqrt{x_0+h+11} + \sqrt{x_0+11}\right)} \\
&= \frac{h}{h\left(\sqrt{x_0+h+11} + \sqrt{x_0+11}\right)} \\
&= \frac{1}{x_0+h+11 + \sqrt{x_0+11}} \qquad \text{si } h \neq 0
\end{aligned}$$

- Limite du taux d'accroissement :

$$\lim_{h\to 0} \mathrm{T}(h) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{x_0+h+11 + \sqrt{x_0+11}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0+11}}$$

Donc f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \dfrac{1}{2\sqrt{x_0+11}}$.

Attention!
f n'est pas dérivable en $\mathbf{x_0 = -11}$
f est dérivable en $\mathbf{x_0 > -11}$ et $\mathbf{f'(x_0) = \dfrac{1}{2\sqrt{x_0+11}}}$.

- Fonction dérivée :

$$f': \begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} & & \\ x_0 & \longmapsto & f'(x_0) & = & \dfrac{1}{2\sqrt{x_0+11}} \\ x & \longmapsto & f'(x) & = & \dfrac{1}{2\sqrt{x+11}} \end{array}$$

On a $\mathrm{D}_{f'} =]-11\,;\,+\infty[$.

1.1.7 Récapitulation

Fonction primitive f	Domaine de définition de f	Fonction dérivée f'	Domaine de définition de f'
$f(x) = x^2$	$D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$	$D_{f'} = \mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{0\right\}$	$f'(x) = \dfrac{-1}{x^2}$	$D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \left\{0\right\}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$D_f = R^+ = [0\,;\,+\infty[$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$D_{f'} = R^+_* =]0\,;\,+\infty[$